

Sélection du groupe $\mathbb{Z}_4$ par le code de Gray et verrou achiral sur l'orientation d'une boucle logique

Un substrat pré-physique et sa transition vers l'information

Yves Kocher

Information Physics Institute, Gosport, Hampshire, Royaume-Uni

www.informationphysicsinstitute.org

Résumé

Ce travail construit un substrat logique situé sous l'espace-temps, l'énergie et l'information physique, et demande quelles structures peuvent y exister. Sur un tel substrat, la réversibilité ne repose pas sur une limite thermodynamique mais sur l'absence d'extérieur : effacer une distinction, c'est l'exporter vers un environnement, et un substrat qui est le tout n'a pas d'environnement pour la recevoir.

Sur l'espace minimal de deux distinctions binaires, un unique critère combinatoire, à savoir qu'un seul bit change à chaque pas, sélectionne parmi les vingt-quatre permutations une seule paire de cycles miroir d'ordre quatre, c'est-à-dire le groupe cyclique d'ordre quatre et ses deux générateurs. Les quatre opérateurs du programme microGlobal, Reproduction, Différenciation, Hiérarchisation et Liaison, ne sont alors pas des axiomes descriptifs mais les composantes de ce groupe. Le critère n'est pas postulé : la paire retenue est l'unique arrangement cyclique de moindre action de Hamming, et cette minimalité se révèle être l'unicité des orbites primitives sous l'atomicité de la distinction, non une optimisation empruntée à la physique.

Restent alors deux boucles, images miroir l'une de l'autre et que rien ne sépare encore. On établit un verrou : aucune grandeur achirale, entropie comprise, ne peut les distinguer, puisqu'elles sont conjuguées par l'inversion du générateur. Leurs compositions nettes sont le même élément du groupe, par commutativité. Au niveau de l'espace, le verrou est démontré à nouveau par une voie spectrale, sous deux prémisses énoncées. Aucune flèche du temps sélectionnée n'est donc inscrite dans le substrat. Ce qui sépare les deux boucles ne peut être qu'un signe, porté par la phase géométrique discrète que l'orbite de Gray acquiert sur le plan de phase de Weyl, quantité impaire sous renversement du temps et invariante de jauge, égale à l'aire orientée enclose (résultat conditionnel à l'enveloppe linéaire, acte du niveau suivant). Sa réalisation est établie au niveau où émerge l'énergie, et le choix du signe y est une convention qu'aucune observable ne lit.

Deux résultats supplémentaires découlent de la même algèbre finie. L'unité imaginaire n'est pas introduite à la main : elle est une valeur propre du générateur, forcée par l'ordre du cycle, et la phase relative entre les deux vecteurs propres chiraux est lisible dans les probabilités elles-mêmes, ce qui place le substrat dans le régime quantique et non classique au sens du critère de comptage de Hardy. Enfin, le caractère binaire de la distinction donne la monogamie de l'intrication comme un décompte plutôt que comme un postulat.

Les revendications sont délibérément étroites et énoncées de façon à pouvoir échouer : trois des quatre réfutations proposées se tranchent par calcul fini sur deux bits.

Mots-clés : Fondements de la physique ; Modèles prégéométriques ; Émergence de l'espace-temps ; Calcul réversible ; Groupe cyclique ; Code de Gray ; Distance de Hamming ; Phase géométrique ; Phase de Berry ; Symétrie de renversement du temps ; Flèche du temps ; Chiralité.

1 Introduction

Cet article est le deuxième volet du programme microGlobal [1], qui s'appuie sur trois traditions convergentes : la théorie générale des systèmes [4] et la cybernétique [5, 6], la thermodynamique des structures dissipatives [7] et la théorie de l'information [8]. Sa contribution propre est d'étendre la notion de système à l'ensemble de la nature en se concentrant sur la typologie des flux. Le premier volet [1] caractérise tout

système auto-organisé par quatre fonctions fondamentales, Reproduction (R), Différenciation (D), Hiérarchisation (H) et Liaison (L), déterminées par trois variables relationnelles : la hiérarchie entre éléments, la réciprocité des flux et la temporalité des échanges. R est un flux sortant asymétrique, par lequel un système transmet son identité ; D consiste en des flux réciproques égaux, par lesquels il échange et se spécialise ; H est un flux entrant asymétrique, par lequel il puise et s'organise ; L engendre des flux purement internes, à flux externe nul, et referme la frontière. Les trois premières sont transactionnelles, en ce que leurs flux traversent la frontière ; L seule est constitutive. Ces fonctions opèrent à travers des niveaux de réalité empilés, chacun caractérisé par un capital émergent : l'information pour l'espace-temps, l'énergie pour les ondes, la masse pour les particules, la forme topologique pour la biologie, le symbole pour les systèmes sociaux. La boucle $R \rightarrow D \rightarrow H \rightarrow L \rightarrow R$ y est posée comme moteur universel de complexification, parcourue dans deux sens, le sens inverse dégradant l'environnement à mesure que le sens direct construit le système, de sorte que complexité et entropie sont deux orientations d'un même cycle plutôt que deux principes.

Le premier volet laisse une question ouverte : d'où viennent les quatre fonctions elles-mêmes ? Elles y sont posées comme axiomes et justifiées a posteriori par leur pouvoir descriptif trans-scalaire. Le présent article les reconstruit à partir d'un critère combinatoire intrinsèque. Il descend sous le niveau de l'espace-temps jusqu'à un substrat logique pré-physique, noté N_{-1} , antérieur à l'espace-temps et à l'information physique, et dont les quatre fonctions émergent comme les seules structures durables sur un espace à deux bits. Le troisième volet traite le niveau suivant, N_0 [2], et les suivants le niveau N_1 [3] et au-delà.

Le résultat est étroit et tient en une phrase. Sous un unique critère combinatoire, qui n'emprunte rien à la physique, une seule paire de structures se détache parmi les vingt-quatre permutations de $\{00, 01, 10, 11\}$; cette paire est le groupe $\mathbb{Z}_4$ muni de ses deux générateurs, et son cycle générateur est $R \rightarrow D \rightarrow H \rightarrow L$. La thèse n'est donc pas que $\mathbb{Z}_4$ serait l'algèbre des deux bits, ce qui serait faux : les basculements de bits forment le groupe de Klein $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, où tout élément est sa propre involution et où aucun élément n'est d'ordre quatre, et la symétrie complète du carré $\{00, 01, 11, 10\}$ est le groupe diédral d'ordre huit. $\mathbb{Z}_4$ apparaît dès lors qu'on privilégie la *rotation* parmi les éléments de ce groupe diédral, et l'unicité revendiquée ici est relative aux structures de boucle, non absolue. Privilégier la rotation n'est pas un postulat caché mais la thèse même du modèle, qui porte sur les processus fermés et non sur les symétries statiques.

Dans tout ce qui suit, le vocabulaire de succession, « puis », « prépare », « étape », dénote un ordre de dépendance logique et jamais une chronologie. À N_{-1} il n'y a pas encore de temps : écrire g^1, g^2, g^3 ne décrit pas trois instants mais trois degrés de composition d'un même générateur. La succession temporelle est un phénomène dérivé, et puisque le temps est ici un résultat, toute lecture chronologique du substrat serait une pétition de principe. De même, les noms R, D, H, L sont employés par anticipation : ils désignent des composantes de $\mathbb{Z}_4$ en nommant ce qu'elles deviendront, leur différenciation sémantique complète n'intervenant qu'aux niveaux supérieurs.

Plusieurs programmes placent une couche non spatiale et non temporelle sous la physique, et il vaut la peine de dire en quoi celui-ci s'en écarte. Le *It from Bit* de Wheeler [9] fait dériver toute entité physique de réponses à des questions binaires ; N_{-1} se situe un cran en dessous, à la possibilité logique de la question, et là où la formule de Wheeler est un programme sans structure algébrique assignée, on propose ici un groupe déterminé et un critère de sélection démontré. L'univers mathématique de Tegmark [10] identifie la réalité physique à une structure mathématique, et sa difficulté connue est l'absence de principe de sélection ; la position adoptée ici est plus étroite, N_{-1} n'étant pas le domaine de toutes les structures mais un noyau minimal portant son propre critère de sélection. La théorie des constructeurs [11, 12] est la plus proche, prenant elle aussi le possible et l'impossible pour objets premiers, mais elle formule des principes sur des tâches physiquement réalisables, donc sur un substrat déjà physique, tandis que le présent travail se tient en amont de l'énergie et du temps ; les deux approches se suivent plutôt qu'elles ne se concurrencent. Les automates et les ensembles causaux [13, 14] engendrent la physique à partir de règles discrètes, mais la règle y est postulée puis explorée par simulation ; ici la règle n'est pas choisie, elle est sélectionnée par un critère interne, et la sélection est démontrée et non observée.

L'article procède comme suit. La section 2 construit N_{-1} : son statut ontologique, la raison pour laquelle la réversibilité y vaut, la discernabilité potentielle, la frontière logique et les quatre régimes de frontière avec leurs opérateurs. La section 3 établit la sélection de $\mathbb{Z}_4$ par le critère de Gray et montre que ce critère est l'unique cycle de moindre action de Hamming. La section 4 définit la boucle, ses deux fermetures et sa durabilité, et démontre que les deux boucles miroir sont indiscernables par grandeurs symétriques à N_{-1} ,

leurs compositions nettes étant le même élément. La section 5 énonce le verrou achiral et identifie la phase géométrique comme seul séparateur. La section 6 tire du spectre du générateur l'origine de l'unité imaginaire, l'observabilité de la phase relative et la monogamie de l'intrication. La section 7 décrit la transition vers N_0 , et la section 8 énonce ce qui réfuterait ce travail et ce qu'il laisse ouvert, avant la conclusion.

2 Le substrat logique N_{-1}

2.1 Statut ontologique et raison de la réversibilité

Le niveau N_{-1} ne décrit ni espace, ni temps, ni énergie. Il décrit des structures logiques et mathématiques pures, relations, opérations et transformations, et surtout des *possibilités de discernabilité* : les conditions logiques qui rendront la distinction possible, avant qu'aucune ne soit actualisée en information. La caractérisation par la négation doit être complétée par une caractérisation positive. Là où N_0 est le domaine du donné, une configuration actuelle de l'espace-temps, N_{-1} est celui du potentiel, de ce qui pourrait être distingué sans l'être nécessairement. Cette distinction modale précède toute distinction physique : avant qu'un état puisse être, il faut qu'il puisse être, et cette modalité est l'objet propre du niveau. Formellement,

$$N_{-1} := (\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{T}, \mathcal{D}), \quad (1)$$

où $\mathcal{M}$ est un ensemble de structures mathématiques, $\mathcal{O}$ un ensemble d'opérations sur $\mathcal{M}$, $\mathcal{T}$ un ensemble de transformations préservant certains invariants, et $\mathcal{D}$ une mesure de discernabilité potentielle, degré de séparabilité logique indépendant de tout support physique. La notation $\mathcal{D}$ plutôt que $\mathcal{S}$ est délibérée : l'information n'émerge qu'à N_0 , lorsqu'un support physique permet d'actualiser les distinctions, et la transition $N_{-1} \rightarrow N_0$ est précisément le passage du potentiel logique à l'information effective.

La contrainte fondamentale du niveau est la réversibilité : toute transformation de $\mathcal{T}$ est une bijection. Son fondement est structurel et non thermodynamique : le coût de Landauer [15], $k_B T \ln 2$, suppose une énergie et une température, qui n'existent pas à N_{-1} . Le fondement est que N_{-1} n'a pas d'extérieur. Effacer n'est jamais détruire sur place ; c'est *exporter* une distinction vers un environnement, la transférer aux degrés de liberté d'un bain, et $k_B T \ln 2$ mesure le coût de ce transfert. Or le substrat est le tout. Il n'y a pas de dehors où déverser quoi que ce soit, pas de bain, pas de réservoir : une distinction ne peut donc y être perdue, seulement transformée. D'où la bijectivité, non comme contrainte imposée de l'extérieur mais comme la seule opération disponible dans un monde sans dehors. Le rôle de Landauer s'en trouve précisé : il n'établit pas la réversibilité, il marque le coût de l'incarnation, le moment où perdre une distinction commence à coûter, quand la distinction logique s'instancie dans un support qui, lui, a une température. Il est un témoin à la frontière, non le fondement du niveau. La réversibilité exige en retour que $\mathcal{T}$ forme un groupe, avec clôture par composition, inverses et identité, et c'est cette structure de groupe qui rend possible la dérivation algébrique qui suit. Le calcul réversible est bien sûr un choix d'ingénierie familier [16, 17, 18, 19] ; à N_{-1} , ce n'est pas un choix.

2.2 Discernabilité potentielle : une primitive orientée et son ombre symétrique

Le capital de N_{-1} est la discernabilité. Pour l'établir sans ambiguïté, on ne part pas d'une mesure symétrique mais d'une unique primitive *orientée*, une longueur de chemin, dont les autres lectures se déduisent. Soit $G \cong \mathbb{Z}_4$ agissant sur les configurations $\Omega = \{00, 01, 11, 10\}$. Le groupe est mono-engendré mais possède deux générateurs, g et $g^3 = g^{-1}$, images miroir l'un de l'autre ; fixons-en un, noté g . La *longueur orientée* de A vers B , relative à g , est

$$\delta(A, B) := \min\{k \geq 0 : g^k \cdot A = B\}. \quad (2)$$

C'est une quasi-distance : elle vérifie $\delta(A, A) = 0$ et l'inégalité triangulaire, mais elle n'est pas symétrique. Cette asymétrie est la graine logique de la flèche du temps, portée par le substrat lui-même et non ajoutée après coup. Mesurées depuis 00, les valeurs reproduisent exactement la hiérarchie des régimes de frontière introduits plus bas, qui est ainsi dérivée et non postulée :

$$\underbrace{\delta(\cdot, 01) = 1}_R < \underbrace{\delta(\cdot, 11) = 2}_D < \underbrace{\delta(\cdot, 10) = 3}_H, \quad g^4 = e \text{ refermant le cycle } (L). \quad (3)$$

Le quatrième régime n'est pas un quatrième cran. Il correspond à $\delta \equiv 0 \pmod{4}$, le retour à l'identité, et non à un pas $\delta = 4$ qui serait au-delà du troisième. C'est la raison structurelle pour laquelle la fermeture ne coûte rien : la longueur orientée *s'annule* en refermant la boucle au lieu de croître.

Aucune des deux orientations n'est privilégiée. L'autre générateur définit la quasi-distance miroir $\delta_{g^3}(A, B) = \delta_g(B, A)$, et les deux sont échangées par l'inversion $g \mapsto g^{-1}$, exactement comme le sont les deux boucles étudiées plus bas. Ce que contient le substrat est donc l'asymétrie elle-même, le fait qu'une orientation existe et que les deux versions diffèrent, et non un sens choisi. Écrire $\delta := \delta_g$ dans toute la suite est une convention d'étiquetage pour le calcul ; cela ne présuppose aucune signification physique, que le verrou achiral de la section 5 interdit de fixer avant N_1 .

Ignorer l'orientation donne une véritable distance, la distance de graphe sur le cycle non orienté à quatre sommets,

$$\mathcal{D}(A, B) := \min(\delta(A, B), \delta(B, A)), \quad (4)$$

et ce point est central pour tout l'article : *ignorer l'orientation est la projection* $N_{-1} \rightarrow N_0$. L'information à N_0 est symétrique et aveugle au sens, ce qui explique par avance pourquoi aucune grandeur neutre, entropie comprise, ne peut lire une orientation, et pourquoi seule une phase géométrique le peut. La longueur orientée porte l'orientation ; la distance symétrique, son ombre désorientée, devient l'information. La symétrie de $\mathcal{D}$ n'est donc pas une propriété fondamentale du substrat mais le résultat d'une projection.

Au-delà de $\mathbb{Z}_4$, la même primitive se généralise comme longueur de chemin dans un graphe pondéré canonique $(\mathcal{M}, \mathcal{T}, w)$ dont le poids d'arête encode l'information logique attachée au choix d'une transformation, $w(A, t(A)) := -\log_2 p(t | A)$ avec $p(t | A) = 1/\deg_{\mathcal{T}}(A)$, la longueur orientée généralisée étant le minimum de $\sum_k w(\gamma_{k-1}, \gamma_k)$ sur les chemins de A vers B . Des poids uniformes redonnent la lecture géodésique et des poids ensemblistes la lecture par recouvrement, de sorte que les deux interprétations usuelles sont des cas particuliers et non des concurrentes, et la définition s'étend à des structures où le recouvrement n'aurait pas de sens. Enfin, comme δ et $\mathcal{D}$ sont binaires alors qu'un capital est scalaire, le capital de discernabilité d'un système est le nombre de configurations qu'il rend mutuellement discernables ; la boucle complète les visite toutes les quatre, d'où $\mathcal{D} = 4$. Son logarithme annonce le capital informationnel de N_0 , dont l'article N_0 fixe l'unité : un bit par face partagée ($\ln 2$).

2.3 La frontière logique, le Dit et les quatre régimes

Toute structure peut être présentée comme une relation séparée par une frontière, notée $\mathcal{A} | \mathcal{B}$, où la barre est une interface qui sépare et relie à la fois. La frontière est logique : elle délimite une possibilité de distinction dans l'espace des structures, sans porter encore d'information au sens physique. Tout commence par l'acte de tracer une distinction [20] ; la frontière est la condition de possibilité de l'information, non l'information elle-même. La traverser est une transformation réversible $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, et l'unité élémentaire du niveau, le *Dit*, est la partition munie de son interface,

$$\text{Dit} = (\mathcal{A}, \mathcal{B}, \varphi), \quad \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset, \quad \mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{U}, \quad (5)$$

et non le seul couple $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, qui ne porterait que la séparation. Cela rend formelle la semi-perméabilité : une frontière semi-perméable est celle dont l'interface est définie sur un sous-domaine strict de $\mathcal{A}$, ce qui passe appartenant à $\text{dom}(\varphi)$ et ce qui est retenu à son complémentaire, les frontières transparente et opaque étant les deux cas limites.

Le Dit n'est pas un bit, et l'ordre entre eux est strict plutôt que terminologique. Un bit présuppose un support physique capable de maintenir dans le temps deux états distinguables, un dispositif, une métrique de stabilité et une énergie minimale d'effacement. Le lieu et le support relèvent de N_0 ; la durée orientée et l'énergie d'effacement n'apparaissent qu'à partir de N_1 . Le Dit n'exige rien de tel : il est la possibilité même d'une distinction, antérieure à tout support qui la porterait. Ce qui est primitif n'est pas l'état 0 ou 1, mais le fait qu'il existe une partition dans laquelle quelque chose peut être distingué d'autre chose. Le codage binaire est le choix de représentation le plus économique pour décrire opérationnellement les Dits, mais il vient après la distinction qu'il représente.

Deux structures ne peuvent se situer l'une par rapport à l'autre que de quatre façons, obtenues en croisant deux axes, la quantité et la qualité, chacun identique ou distinct (figure 1). En notant $\mathcal{Q}$ la quantité et $\mathcal{K}$ la qualité, les régimes sont les suivants. $A \equiv B$ vaut lorsque deux entités distinctes s'accordent en quantité *et* en

qualité : la frontière existe, puisque A et B sont deux, mais elle est maximalelement transparente, puisque rien ne les différencie. C'est le fondement logique de la Reproduction, la capacité d'être deux sans être différents, et sa discernabilité est minimale mais non nulle, la seule information potentielle étant la cardinalité. $A = B$ vaut lorsque la quantité est partagée et la qualité diffère : la frontière est transparente à la quantité et opaque à la qualité, ce qui est la signature d'une brisure de symétrie, quelque chose se conservant tandis que la structure qualitative diffère, et le théorème de Noether [21] rattache chacune de ces relations à une symétrie conservée. $A \neq B$ vaut lorsque les deux diffèrent, régime le plus fort, sans propriété partagée. Il mesure une différence de *rang* entre entités d'un même niveau, comme entre un proton et un électron, ou entre la reine et l'ouvrière, et ne décrit que dérivativement la séparation entre deux niveaux déjà constitués. Il reste réversible à N_{-1} : c'est simplement le plus long chemin réversible, $\delta = 3$, et non une traversée coûteuse, le coût de Landauer n'apparaissant qu'aux niveaux qui ont une énergie, à partir de N_1 (N_0 n'en a pas).

Le quatrième régime, noté $\emptyset$, est celui qui porte l'émergence. Deux domaines fusionnent en une entité unique AB irréductible à la somme de ses parties, avec $\mathcal{K}(AB) \not\supseteq \mathcal{K}(A) \cup \mathcal{K}(B)$ et $\mathcal{Q}(AB) \neq \mathcal{Q}(A) + \mathcal{Q}(B)$. La Liaison est l'inverse logique de la Différenciation : là où D part d'une unité pour produire de la diversité qualitative, L part de la multiplicité pour produire une unité qualitativement neuve. Deux précisions s'imposent. La discernabilité *consommée* par l'opérateur L est nulle, puisque aucune configuration ne change ; mais la discernabilité *entre* A et AB ne l'est pas, une entité fusionnée différant irréductiblement de ses composantes. Le chemin est nul, le produit du chemin ne l'est pas, et c'est exactement ce qui fait de L l'opérateur de l'émergence plutôt qu'un opérateur de séparation extrême. Cela règle aussi la question de savoir d'où vient un nouveau niveau : un niveau ne naît pas d'une séparation poussée à son maximum mais d'une fermeture. Les deux régimes forts se partagent le travail, $\neq$ ordonnant l'intérieur d'un système en y instituant des rangs, $\emptyset$ en faisant une unité, et c'est cette unité, non l'écart, qui devient élément du niveau supérieur.

		Quantité	
		identique	distincte
Qualité	identique	$\equiv$ R : Reproduction copies identiques	$\emptyset$ L : Liaison qualité émergente
	distincte	$=$ D : Différenciation même quantité, autre forme	$\neq$ H : Hiérarchisation tout distinct

Figure 1: Le carré logique des quatre frontières. Les deux axes, quantité et qualité, chacun identique ou distinct, engendrent exactement quatre régimes de discernabilité, qui sont les quatre façons dont deux structures peuvent se situer l'une par rapport à l'autre et le fondement des quatre opérateurs de $\mathbb{Z}_4$.

Les quatre régimes sont statiques : ils décrivent un état relationnel. À chacun correspond un opérateur dynamique qui le produit, et c'est là l'articulation duale du substrat, être en relation et transformer étant les deux faces d'une même structure. R préserve la composition, si bien que son image conserve la structure interne de l'original, d'où la correspondance avec $\equiv$. D partitionne une structure en sous-structures dont les groupes de symétrie sont des sous-groupes propres, en préservant un invariant tout en diversifiant le reste, ce qui est exactement $=$; algébriquement c'est une involution. H munit $\mathcal{M}$ d'un ordre et projette un niveau dans un autre en préservant la composition, de sorte que la frontière engendrée est $\neq$; algébriquement $H = R^{-1}$. L combine deux structures en une qui n'est pas réductible à leur produit, signature algébrique de l'émergence ; algébriquement $L = e$, et cette trivialité apparente *est* le sens de la Liaison, car ce qui distingue un système lié n'est pas une transformation de ses éléments mais l'établissement d'une relation entre eux.

Une mise en garde s'impose. Les propriétés algébriques que l'on vient d'énumérer, être le générateur, être une involution non triviale, être l'inverse du générateur, être l'identité, caractérisent sans ambiguïté les quatre éléments de $\mathbb{Z}_4$ et sont des théorèmes. Les descriptions qui les accompagnent, « H est un foncteur », « L est un produit tensoriel », ne se déduisent pas de l'algèbre : ce sont des interprétations superposées à des éléments de groupe qui, en eux-mêmes, sont tous de même nature, à savoir des puissances de g . On les

conserve pour leur valeur heuristique, et rien de ce qui suit n'en dépend.

3 Sélection de $\mathbb{Z}_4$ par le critère de Gray

3.1 L'espace minimal et les six cycles d'ordre quatre

La réversibilité oblige à travailler sur un espace de configurations, et le plus petit qui convienne en compte deux bits. Pour définir des opérateurs sur des distinctions il faut un espace sur lequel ils agissent, aussi chaque Dit est-il représenté par un symbole binaire, choix minimal canonique de deux symboles pour deux domaines, et deux Dits indépendants donnent les quatre états $\{00, 01, 10, 11\}$.

Proposition 1 (Minimalité de $\{0, 1\}^2$). *$\{0, 1\}^2$ est le plus petit espace sur lequel quatre opérateurs réversibles distincts, formant un groupe cyclique d'ordre quatre et satisfaisant au critère de Gray ci-dessous, peuvent être simultanément définis.*

Démonstration. Sur $\{0, 1\}^1$ le groupe symétrique est d'ordre deux et ne contient que l'identité et la négation : quatre opérateurs distincts, et a fortiori un groupe d'ordre quatre, ne peuvent y être définis. Sur $\{0, 1\}^2$ le groupe symétrique est d'ordre vingt-quatre et contient des cycles d'ordre quatre ; les six cycles d'ordre quatre se réduisent à deux sous le seul critère de Gray (proposition 2), formant $\mathbb{Z}_4$. Pour $n \geq 3$ les opérateurs peuvent être définis comme extensions triviales agissant sur les deux premiers bits, mais les bits supplémentaires introduisent des degrés de liberté que le critère ne contraint pas et qui exigeraient des hypothèses extérieures à N_{-1} . L'espace minimal suffisant est donc $n = 2$. $\square$

Il existe $4! = 24$ portes réversibles sur cet espace, dont $(4 - 1)! = 6$ cycles d'ordre quatre, formant trois paires d'inverses (tableau 1). La structure cyclique s'exprime par les puissances successives d'un générateur, et le groupe obtenu est $\mathbb{Z}_4$ et non le groupe de Klein : il possède un ordre et deux orientations, portées par ses deux générateurs g et g^{-1} , sans que l'une soit privilégiée.

Tableau 1: Les six cycles d'ordre quatre sur $\{00, 01, 10, 11\}$, leur carré, leur score de Gray, c'est-à-dire le nombre de pas ne changeant qu'un bit, et leur action de Hamming $\mathcal{A}$. Les paires d'inverses sont $\{(1), (3)\}$, $\{(2), (6)\}$ et $\{(4), (5)\}$.

#	Orbite de g	g^2	Gray	$\mathcal{A}$
(1)	$00 \rightarrow 01 \rightarrow 11 \rightarrow 10 \rightarrow 00$	$00 \leftrightarrow 11, 01 \leftrightarrow 10$ (axial)	oui	4
(3)	$00 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 01 \rightarrow 00$	$00 \leftrightarrow 11, 01 \leftrightarrow 10$ (axial)	oui	4
(2)	$00 \rightarrow 01 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 00$	$00 \leftrightarrow 10, 01 \leftrightarrow 11$ (diagonal)	non	6
(6)	$00 \rightarrow 11 \rightarrow 10 \rightarrow 01 \rightarrow 00$	comme (2)	non	6
(4)	$00 \rightarrow 10 \rightarrow 01 \rightarrow 11 \rightarrow 00$	$00 \leftrightarrow 01, 10 \leftrightarrow 11$ (diagonal)	non	6
(5)	$00 \rightarrow 11 \rightarrow 01 \rightarrow 10 \rightarrow 00$	comme (4)	non	6

3.2 Le critère et ce qu'il sélectionne

Un seul critère est imposé.

Critère C1 (code de Gray [22]). Un seul bit change à chaque pas.

La raison pour laquelle il mord est structurelle. Sur $\{0, 1\}^2$, le graphe d'adjacence de Hamming à distance un [23] est l'unique cycle $00-01-11-10$; un cycle d'ordre quatre à transitions unitaires ne peut donc que parcourir ce carré, dans l'un de ses deux sens. Deux propriétés découlent de C1, sans être des contraintes supplémentaires : le carré du générateur est l'involution axiale complète, échangeant 00 avec 11 et 01 avec 10 ; et le profil de points fixes est $(0, 0, 0, 4)$, aucun état n'étant stabilisé avant la fermeture du cycle.

Proposition 2 (Sélection combinatoire). *Une permutation de $\{00, 01, 10, 11\}$ satisfait C1 si et seulement si elle satisfait C1 et les deux propriétés que l'on vient d'énoncer, si et seulement si elle est l'orbite (1) ou l'orbite (3) du tableau 1, c'est-à-dire g ou g^{-1} .*

Démonstration. C1 élimine les orbites (2), (4), (5) et (6), qui comportent chacune au moins un pas changeant deux bits, et laisse $\{(1), (3)\}$, puisque les seuls cycles d'ordre quatre à transitions unitaires sont les deux parcours du carré de Hamming. Pour ces deux orbites, la forme axiale de g^2 et le profil de points fixes sont alors automatiques, comme le montre la vérification directe : les orbites (2) et (6) donnent $g^2(00) = 10$ et les orbites (4) et (5) donnent $g^2(00) = 01$, dans aucun cas la valeur axiale 11. Enfin $(3) = (1)^{-1}$. $\square$

En fixant le générateur (1) comme porte fondamentale, les quatre opérateurs s'écrivent, sous forme canonique,

$$g^1 = R : \quad 00 \rightarrow 01, \quad 01 \rightarrow 11, \quad 11 \rightarrow 10, \quad 10 \rightarrow 00, \quad (6)$$

$$g^2 = D : \quad 00 \rightarrow 11, \quad 01 \rightarrow 10, \quad 11 \rightarrow 00, \quad 10 \rightarrow 01, \quad (7)$$

$$g^3 = H : \quad 00 \rightarrow 10, \quad 10 \rightarrow 11, \quad 11 \rightarrow 01, \quad 01 \rightarrow 00, \quad (8)$$

$$g^4 = L : \quad 00 \rightarrow 00, \quad 01 \rightarrow 01, \quad 11 \rightarrow 11, \quad 10 \rightarrow 10, \quad (9)$$

ou encore, en notant un état $b_1 b_0$: R agit par $b'_1 = b_0$, $b'_0 = \overline{b_1}$, demi-incrémenteur, rotation d'un cran sur l'orbite de Gray ; D par $b'_1 = \overline{b_1}$, $b'_0 = \overline{b_0}$, double négation, polarisation maximale ; H par $b'_1 = \overline{b_0}$, $b'_0 = b_1$, demi-décrémenteur ; et L est l'identité. La table de composition suit aussitôt, $R \circ R = D$, $R \circ D = H$, $R \circ H = L$ et $D \circ D = L$, de sorte qu'une seule porte engendre tout le système.

Deux conséquences méritent d'être soulignées. D'abord, D et L sont des involutions et engendrent donc des flux symétriques, tandis que R et H sont inverses l'un de l'autre et engendrent des flux asymétriques ; le nombre de points fixes encode l'intensité du flux, R , D et H n'en ayant aucun, de sorte que toutes les configurations sont engagées, et L en ayant quatre, son flux externe étant nul tandis que son flux interne reste réciproque. Ensuite, et c'est moins souvent remarqué, les deux diagonales du cycle n'ont pas le même statut algébrique. La paire $\{L, D\}$, identité et involution, est exactement l'unique sous-groupe d'ordre deux de $\mathbb{Z}_4$ et elle est close par composition ; la paire $\{R, H\}$, générateur et générateur inverse, n'est *pas* un sous-groupe, puisque $R \circ H = e$ lui est extérieur. Un seul des deux axes est un sous-groupe, et cette asymétrie explique pourquoi R et H seuls portent l'orientation que le verrou achiral interdit de fixer à N_{-1} , l'autre axe étant invariant sous l'inversion qui échange R et H .

Une clarification, enfin, qui devance une objection immédiate. $\mathbb{Z}_4$ est abélien, de sorte que la non-commutativité pertinente à N_{-1} n'est pas celle de ses éléments mais celle des primitives dont ils sont composés : la négation (un basculement) et la disjonction exclusive (une opération conditionnelle, qui lit b_0 et écrit sur b_1) ne commutent pas, comme on le vérifie sur $(b_1, b_0) = (0, 1)$, où nier le bit de poids faible après la disjonction donne $(1, 0)$ tandis que l'ordre inverse donne $(0, 0)$. C'est un invariant structurel du substrat, nécessaire à l'universalité du calcul réversible, et il reparait en section 5 comme la relation de Weyl à partir de laquelle la phase géométrique est construite. Sur deux bits, cette non-commutation suffit déjà : l'article N_0 établit que les commutateurs d'un basculement et des deux opérations conditionnelles engendrent $\mathfrak{su}(2)$, de dimension trois, et qu'un troisième bit donnerait $\mathfrak{so}(7)$, que la minimalité exclut. L'universalité du calcul réversible, elle, demande trois bits et la porte de Toffoli [18]. Le noyau fonde la boucle, la non-commutation des primitives fonde la géométrie de N_0 , le déploiement fonde l'universalité. À l'objection selon laquelle un groupe abélien ne saurait produire de non-commutativité, la réponse est qu'on ne la tire pas de lui, mais des primitives.

3.3 Pourquoi le critère n'est pas arbitraire

C1 suffit à la sélection ; sa *canonicité* s'établit en deux temps. Le premier montre que C1 est l'unique minimiseur d'une action interne au substrat.

Proposition 3 (Moindre action de Hamming). *Parmi les six arrangements cycliques visitant les quatre états de $\{0, 1\}^2$ et se refermant, la paire de Gray est la seule à minimiser l'action de Hamming*

$$\mathcal{A}(c) = \sum_{i=1}^4 d_H(x_i, x_{i+1}), \quad x_5 \equiv x_1. \quad (10)$$

Son action vaut $\mathcal{A} = 4$; tout autre cycle hamiltonien d'ordre quatre vérifie $\mathcal{A} \geq 6$.

Démonstration. Un tel cycle comporte exactement quatre pas et $d_H(x, y) \geq 1$ pour $x \neq y$, donc $\mathcal{A}(c) \geq 4$, avec égalité si et seulement si chaque pas vérifie $d_H = 1$. Sur $\{0, 1\}^2$, $d_H = 1$ signifie qu'un seul bit diffère, les seules paires à distance deux étant $\{00, 11\}$ et $\{01, 10\}$. Le graphe de Hamming est biparti selon la parité $b_1 \oplus b_0$, les états pairs étant $\{00, 11\}$ et les impairs $\{01, 10\}$. Un cycle hamiltonien visite deux états de chaque classe ; pour que tous les pas vérifient $d_H = 1$, et donc changent la parité, la suite des parités doit alterner, ce qui, à rotation et réflexion près, n'a lieu que pour 00–01–11–10, l'orbite de Gray parcourue dans l'un ou l'autre sens. Tout autre arrangement contient deux états consécutifs de même parité, donc un pas à $d_H = 2$, d'où $\mathcal{A} \geq 6$. $\square$

C1 n'est donc pas un critère adjoint mais l'unique extremum d'une action définie par la seule métrique de Hamming, intrinsèque au produit des bits et n'exigeant aucune structure externe. La démonstration établit au passage l'équivalence de C1 avec trois propriétés indépendantes : l'atomicité, chaque pas basculant un bit ; l'adjacence, le cycle n'empruntant que des arêtes du graphe de Hamming ; et l'alternance des parités.

Le second temps lève l'apparence d'une optimisation. Il serait circulaire d'invoquer ici le principe global de minimisation du modèle, et ce serait une erreur de catégorie d'invoquer l'énergie, qui n'existe pas à ce niveau. L'argument est au contraire purement logique et repose sur deux engagements constitutifs de N_{-1} : l'atomicité, le bit étant l'unité indécomposable de la distinction, de sorte qu'un acte primitif porte sur un et un seul bit ; et la *raison suffisante* sous forme pré-temporelle, le substrat ne posant aucune distinction sans fondement, et aucune relation de simultanéité n'existant avant l'émergence du temps.

Proposition 4 (La moindre action comme unicité, non comme optimum). *Sous l'atomicité et la raison suffisante pré-temporelle, toute transition du substrat change exactement un bit. Par conséquent, parmi les trajectoires fermées visitant les quatre états, seules les orbites de Gray sont des orbites primitives ; les quatre cycles diagonaux n'en sont pas. La moindre action de Hamming de la proposition 3 n'est donc pas le résultat d'une optimisation : le substrat ne possède aucune orbite primitive d'action supérieure.*

Démonstration. Une transition basculant deux bits devrait ou bien les *lier*, en établissant une corrélation entre deux coordonnées que la structure de produit définit comme indépendantes, corrélation sans fondement qu'exclut la raison suffisante ; ou bien les exécuter en même temps, ce qui suppose la simultanéité, relation temporelle absente à N_{-1} . Les deux étant exclues, une transition n'engage qu'une distinction, c'est-à-dire un bit, donc $d_H = 1$ à chaque pas. Les paires à $d_H = 2$ ne sont alors pas des pas mais des compositions de deux pas, et un cycle qui les emprunte n'est pas une orbite à quatre pas mais un composé. Parmi les orbites fermées véritables, à quatre pas atomiques et visitant les quatre états, seules subsistent les orbites de Gray. $\square$

Cela renverse l'intuition usuelle. L'ordre des raisons n'est pas « minimisation du changement, donc émergence du temps », mais l'inverse : pas de temps, donc pas de simultanéité, donc distinction sérielle et atomique, donc C1. L'ordre sériel forcé des distinctions, succession logique sans métrique, est ce qui devient le temps, axe d'ordre sans orientation à N_0 puis orienté à N_1 ; la sérialité de C1 est la préforme du temps. Le principe de moindre action de la physique n'est alors pas la source de cet argument mais sa projection : lorsque les pas discrets deviennent un chemin continu aux niveaux supérieurs, l'atomicité logique devient action extrême, et le minimum d'énergie en est la manifestation physique. Un résidu est assumé et nommé : la raison suffisante est un principe logique et non un théorème, et on la tient pour constitutive de la rationalité du substrat. Le gain est qu'on a remplacé « pourquoi le substrat minimiserait-il l'énergie ? », qui n'a pas de réponse interne, par « le substrat ne pose aucune distinction sans fondement, et cela avant tout temps », loi de la pensée et non de la physique.

4 La boucle, ses fermetures et l'indiscernabilité des deux orientations

Les quatre composantes de $\mathbb{Z}_4$ étant établies, la question devient celle de l'**ordre** dans lequel les composer pour que la structure persiste et capitalise. À N_{-1} il n'y a ni temps ni durabilité au sens physique, et le critère qui gouverne est plus primitif : la *fermeture logique*. Elle prend deux formes, qu'il ne faut pas confondre (figure 2).

La *fermeture topologique* est celle de l'orbite du générateur : $g^4 = e$, et chaque état revient à lui-même après quatre pas. La *fermeture dynamique* est la composition séquentielle des quatre opérateurs distincts,

$$\sigma := L \circ H \circ D \circ R = g^{1+2+3+4} = g^{10} = g^2 \neq e. \quad (11)$$

Les deux ne sont pas redondantes. La fermeture topologique garantit que le cycle existe comme entité, condition sans laquelle aucune notion de boucle n'aurait de sens ; mais une orbite qui se referme n'implique pas que sa composition accomplisse quoi que ce soit, et si σ était l'identité le cycle serait contemplatif, existant sans rien transformer. La fermeture dynamique garantit l'inverse, à savoir que chaque parcours polarise la configuration à laquelle il s'applique. La topologie donne au cycle son être, la dynamique son acte ; une boucle qui ne se refermerait pas ne serait pas une structure, et une boucle dont la composition serait l'identité serait une structure inerte. C'est leur conjonction qui constitue le capital structurel primitif de N_{-1} : la fermeture crée un intérieur logique, propriété purement algébrique qui délimite un dedans et un dehors.

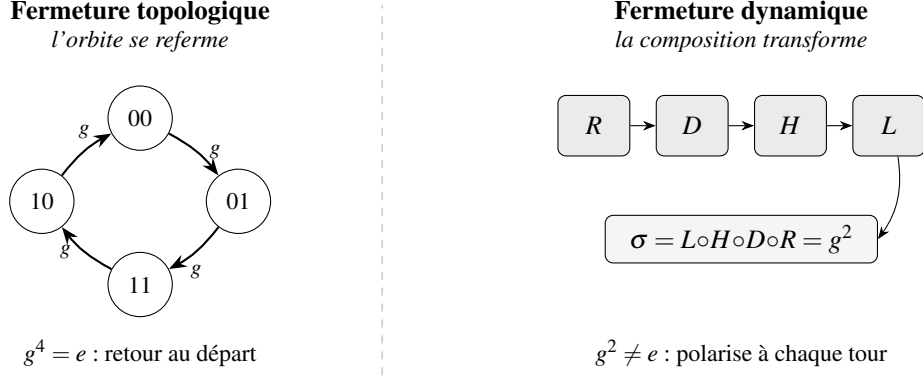


Figure 2: Les deux fermetures. À gauche, l'orbite engendrée en appliquant quatre fois le seul générateur revient à son point de départ. À droite, la composition des quatre opérateurs *distincts* n'est pas l'identité mais l'involution g^2 , de sorte que chaque parcours transforme effectivement la configuration.

Que σ vaille D et non e est ce qui rend la boucle productive, et l'écart entre les deux énoncés est un écart de question. La relation $g^4 = e$ répond à : où va un état après quatre applications du même opérateur ? Il revient à lui-même. La relation $\sigma = g^2$ répond à : quelle transformation globale résulte de l'application successive des quatre opérateurs distincts ? Une involution. Parcourir le cycle ne ramène donc pas l'état à son origine, il le polarise, accomplissant un travail logique tout en préservant la réversibilité globale.

Lorsque le temps orienté émerge, à N_1 , la fermeture conservative se projette en *durabilité*, capacité d'une boucle à être parcourue indéfiniment sans dégrader la structure qu'elle forme (l'article N_0 emploie le mot dans un autre sens, le compromis entre la complexité des frontières et la liberté des configurations). Le changement est de statut plutôt que de vocabulaire : à N_{-1} , $\mathcal{L}(x) = x$ est une identité algébrique sans durée ; à N_1 la même identité devient itérable, et la question passe du qualitatif au quantitatif. La durabilité combinatoire est la fréquence de retour à l'état initial,

$$\mathcal{D}_{\text{comb}}(\mathcal{L}_\pi) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \# \{ k \leq n \mid \sigma_\pi^k(A) = A \}, \quad (12)$$

limite au sens de Cesàro dont l'existence est immédiate pour un groupe fini de permutations. Comme $\sigma = D$ est une involution de période deux, les deux boucles donnent $\mathcal{D}_{\text{comb}} = 1/2$. La valeur n'est ni trop basse, ce qui signifierait une période trop longue pour stabiliser une structure, ni trop haute, ce qui signifierait une oscillation stérile ; si σ avait été l'identité, la durabilité aurait dégénéré en un et le cycle n'aurait eu aucun effet net.

On peut maintenant énoncer le résultat négatif central, qui est un test de cohérence plutôt qu'une limitation. Notons $\mathcal{L}_{\text{RDHL}}$ la boucle engendrée par g et $\mathcal{L}_{\text{RLHD}}$, son inverse, celle engendrée par $g^{-1} = g^3$; la seconde parcourt $R \rightarrow L \rightarrow H \rightarrow D$, mêmes primitives et même algèbre en sens inverse.

Proposition 5 (Indiscernabilité par grandeurs symétriques à N_{-1}). *Aucun invariant symétrique de N_{-1} ne distingue les orbites (1) et (3) : elles partagent le même groupe, le même carré, le même profil de points fixes, la même action de Hamming et la même table de composition à isomorphisme près, et l'automorphisme $\phi(x) = \bar{x}$ conjugue l'une en l'autre, $(3) = \phi \circ (1) \circ \phi^{-1}$.*

Les deux orbites *diffèrent* bien par leur orientation, comme l'enregistre la primitive orientée δ de la section 2.2 : l'une parcourt le cycle par g , l'autre par g^{-1} . Ce qu'aucun invariant symétrique, c'est-à-dire

achiral, ne peut faire, c'est lire cette différence. Le terme employé ici est donc indiscernabilité par grandeurs symétriques, et il ne doit pas être confondu avec l'indécidabilité au sens de Gödel ou de Turing.

À N_0 non plus, rien ne sépare les deux boucles, pour la raison suivante. Les opérateurs s'y étendent en opérateurs unitaires sur $\mathbb{C}^4$, et pour toute permutation π des quatre exposants, comme déjà à N_{-1} ,

$$\sigma_\pi = g^{\pi(4)} \circ g^{\pi(3)} \circ g^{\pi(2)} \circ g^{\pi(1)} = g^{\pi(1)+\pi(2)+\pi(3)+\pi(4)} = g^2, \quad (13)$$

la somme des exposants ne dépendant pas de l'ordre. Les compositions nettes des deux boucles coïncident donc, et les générateurs g et g^{-1} restent deux opérateurs distincts, échangés par la conjugaison. Cette égalité n'est en rien une propriété de la paire : elle vaut identiquement pour les vingt-quatre ordres des quatre opérateurs et n'est qu'une reformulation de la commutativité de $\mathbb{Z}_4$. Ce qui interdit de séparer les deux parcours à N_0 est autre chose, le verrou spectral de l'article N_0 [2]. Le renversement du temps y est antiunitaire, et sous deux prémisses (P1 : la conjugaison complexe n'est pas brisée ; P2 : sa partie unitaire appartient au groupe de symétrie du niveau), toute observable invariante est paire. Aucune n'oriente l'axe d'ordre, et le niveau n'a pas de dynamique. Il ne sélectionne donc pas de boucle, il confirme seulement qu'aucun niveau antérieur au choix d'une racine de -1 ne le peut (figure 3).

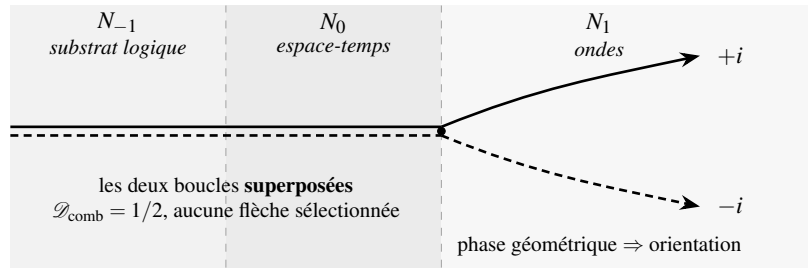


Figure 3: Divergence des deux boucles miroir à travers les niveaux. Elles sont indiscernables par toute grandeur symétrique à N_{-1} , et aucune observable invariante ne les sépare à N_0 (verrou spectral, sous ses deux prémisses), de sorte qu'aucune flèche du temps n'y est *sélectionnée*. Elles ne sont nommées qu'à N_1 , par le choix d'un signe, la phase géométrique que porte l'orbite ; ce choix est une convention.

Cette hiérarchie est une exigence de cohérence, non une lacune à combler. Si la flèche thermodynamique du temps est véritablement émergente, alors aucune asymétrie temporelle ne doit être lisible à un niveau qui précède l'émergence du temps ; si un invariant symétrique distinguait les deux boucles à N_{-1} , le *sens* de la flèche serait inscrit dans le substrat logique lui-même, ce qui contredirait la thèse de son émergence et repousserait le problème de son origine d'un cran. Le programme ne prétend pas dériver la flèche du temps d'un substrat qui en est dépourvu, et un théorème élémentaire l'interdit : sous toute évolution invariante par renversement du temps, une suite et son inverse partagent tous leurs invariants. Cela localise aussi les points où le programme peut échouer, ce qui est l'intérêt de l'énoncer : si l'on découvrait à N_{-1} un critère algébrique séparant les deux boucles, l'hypothèse d'émergence tomberait ; et si une observable de N_1 lisait le signe retenu, ou si deux régions connexes pouvaient durablement porter des signes opposés, les théorèmes de l'article N_1 [3] tomberaient, et avec eux la place que cet article donne à la sélection.

5 Le verrou achiral et la phase géométrique

5.1 Le verrou

Un apport caractéristique de N_1 , par exemple le couplage à un bain qui garde mémoire des états visités et la production d'entropie qui l'accompagne, ne sépare pas les deux boucles, et l'obstacle est structural. Définissons le poids combinatoire d'un opérateur comme la distance de Hamming moyenne entre un état et son image,

$$\mathcal{V}(g^k) := \frac{1}{4} \sum_{s \in \{0,1\}^2} d_H(s, g^k(s)), \quad (14)$$

dont les valeurs sont rassemblées dans le tableau 2.

Tableau 2: Poids combinatoire, points fixes, ordre et parité des quatre opérateurs. L est parfaitement conservatif, D maximalement dispersif, et R et H portent la variation minimale non nulle en sens opposés. L'égalité $\mathcal{V}(R) = \mathcal{V}(H)$ est la symétrie achirale sur laquelle repose le théorème 6.

Op.	Orbite	$\mathcal{V}$	Points fixes	Ordre	Parité
$L = g^4$	identité	0	4/4	1	conservée
$R = g^1$	$00 \rightarrow 01 \rightarrow 11 \rightarrow 10 \rightarrow 00$	1	0/4	4	brisée
$H = g^3$	$00 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 01 \rightarrow 00$	1	0/4	4	brisée
$D = g^2$	$00 \leftrightarrow 11, 01 \leftrightarrow 10$	2	0/4	2	conservée

Théorème 6 (Verrou achiral). *Les deux boucles sont conjuguées par l'inversion $\phi : g \mapsto g^{-1}$, réalisée sur les états par la transposition des bits $\psi : b_0 \leftrightarrow b_1$, qui fixe 00 et 11, échange 01 et 10, et vérifie $\psi g \psi^{-1} = g^{-1}$. Le poids combinatoire est invariant par cette inversion, $\mathcal{V}(g^1) = \mathcal{V}(g^3)$. Par conséquent, sur la période de la dynamique, $\sigma = g^2$ étant d'ordre deux, toute fonctionnelle achirale, c'est-à-dire invariante par renversement du temps, y compris l'entropie d'occupation d'un bain, attribue la même valeur aux deux boucles. Aucune grandeur de ce type ne peut orienter la sélection.*

Le théorème ferme la voie des *grandeurs* : entropie, chaleur dissipée et action sont paires sous renversement du temps et structurellement aveugles à l'orientation. La primitive orientée δ sépare bien les deux orbites, mais précisément parce qu'elle est chirale, c'est-à-dire impaire sous renversement du temps et non invariante sous l'inversion ; elle échappe au verrou sans le contredire. La distinction ne peut donc résider ailleurs que dans une grandeur, à savoir dans un *signe*, dont δ est la graine à N_{-1} .

5.2 La clé

Les deux boucles ne diffèrent que par l'orientation du chemin de Gray. Sur le plan de phase de Weyl associé aux bits, cette orientation se lit comme une phase géométrique discrète, et la construction n'utilise rien de plus que la non-commutativité déjà établie en section 3.2.

Munissons $\{0, 1\}^2$ d'une structure de plan de phase, b_0 jouant le rôle de la position et b_1 celui de l'impulsion, et introduisons les opérateurs de décalage et d'horloge du système à quatre états, avec $\omega = e^{2i\pi/4} = i$:

$$X|x\rangle = |x+1 \bmod 4\rangle, \quad Z|x\rangle = i^x|x\rangle, \quad ZX = iXZ. \quad (15)$$

La relation $ZX = iXZ$ est la non-commutativité des primitives du substrat, et c'est elle qui rend la phase non triviale. En notant le déplacement $D(a, b) = X^a Z^b$, la relation de Weyl donne la règle de composition

$$D(a_1, b_1) D(a_2, b_2) = i^{a_2 b_1} D(a_1 + a_2, b_1 + b_2). \quad (16)$$

Les quatre états de Gray $|00\rangle, |01\rangle, |11\rangle, |10\rangle$ sont les points $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$, sommets d'une cellule du plan de phase. Le long d'une boucle fermée, les exposants cumulés de X et de Z s'annulent, si bien que par (16) le produit ordonné des déplacements élémentaires se réduit à une phase pure fois l'identité, dont l'argument est la somme des contributions $i^{\Delta a \cdot b}$, c'est-à-dire l'aire orientée enclose.

Proposition 7 (Phase géométrique de l'orbite de Gray). *Le produit ordonné des déplacements de Weyl le long de l'orbite de Gray vaut une phase pure $i^{\mathcal{A}}$, où $\mathcal{A} = \pm 1$ est l'aire orientée enclose :*

$$e^{i\gamma} = i^{\mathcal{A}} = \pm i, \quad \gamma = \pm \frac{\pi}{2}. \quad (17)$$

L'orbite de g enclôt $\mathcal{A} = +1$ et porte $+i$; celle de g^3 enclôt $\mathcal{A} = -1$ et porte $-i$. La phase est invariante de jauge, étant un invariant de Bargmann, et change de signe avec l'orientation.

Le signe d'ensemble de γ dépend de l'orientation conventionnelle de la forme symplectique ; ce qui est invariant, et ce qui importe, c'est que les deux orbites reçoivent des phases opposées. C'est parce qu'elle est impaire sous renversement du temps que la phase réussit là où l'entropie échoue : elle lit le *signe* d'une chiralité, non une grandeur, les deux modules coïncidant puisque $|+i| = |-i| = 1$.

Cette logique a un précédent thermodynamique exact, qu'il vaut la peine d'énoncer car il montre que rien d'exotique n'est invoqué (figure 4). Un moteur de Carnot et son inverse, la machine frigorifique, ne se distinguent pas par l'entropie, puisque pour un cycle réversible idéal la variation d'entropie de l'univers est nulle dans les deux sens, mais par le signe de l'aire orientée enclose $\oint T dS = W$, qui est le travail. La structure est la même : une boucle et son inverse, identiques en toutes leurs grandeurs, séparées par le signe d'une aire orientée.

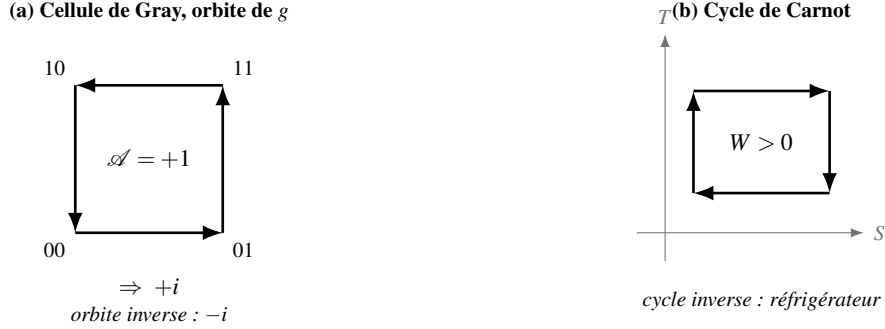


Figure 4: L'orientation d'une boucle et son analogie de Carnot. Sur la cellule de Gray du plan de phase de Weyl, l'orbite de g enclôt une aire orientée $+1$ et porte la phase $+i$, son inverse portant $-i$. Dans le plan entropie-température, un cycle de Carnot parcouru dans un sens est un moteur et dans l'autre une machine frigorifique. Dans les deux cas, le cycle et son inverse partagent toutes leurs grandeurs achirales et ne sont séparés que par le signe d'une aire orientée enclose, quantité impaire sous renversement du temps.

5.3 Réalisation et choix du signe

À N_1 , l'énergie, la fréquence et la propagation émergent, et le degré de liberté devient une onde munie d'une relation de dispersion. L'article consacré à ce niveau [3] établit les deux énoncés suivants, crédités ici.

La dispersion comme lecture de l'acte. À chaque opérateur correspond une durée $\tau_k = \tau_0 \mathcal{V}(g^k)$ et une phase $\Phi_k = \tau_0 \mathcal{V}(g^k) \omega(\theta)$. La relation de dispersion ω n'est pas un ingrédient de plus : elle est la forme que prend, dans le registre des ondes, l'acte de N_1 , le choix d'une racine de -1 . Elle se reconstruit à partir de la seule racine, sans reste, et elle est linéaire à l'ordre dominant.

Réalisation comme phase géométrique. Le signe de la proposition 7 se réalise à N_1 comme une phase géométrique égale à l'aire symplectique enclose : le transport compose les déplacements de Weyl, et la phase du cycle vaut $\gamma_{\text{geo}} = \pm\pi/2$ sur la cellule d'aire $h/4$ des deux quadratures d'un mode. Étant géométrique, elle est indépendante de la dispersion.

Le partage des rôles est le point de la construction : l'acte de N_1 , le choix d'une racine de -1 , ancre la sélection à N_1 et non à N_0 , dépourvu de dynamique ; la phase géométrique fournit le séparateur invariant. Une contribution dynamique supplémentaire, $\sum_k \tau_k \omega$, dépend de la dispersion et des conventions, et accompagne la phase géométrique sans en être le séparateur.

Enfin, l'existence de deux boucles miroir séparées par un signe est dérivée, et le choix du signe est une convention, au sens où la phase globale en est une. L'article N_1 démontre qu'aucune observable ne le lit : retourner le signe retourne ensemble le sens du temps et la main des fermions, et laisse toute observable interne inchangée. La condition initiale de basse entropie (hypothèse de courbure de Weyl [24]) porte sur l'état de basse entropie et laisse le signe libre. Le programme est ainsi compatible avec le second principe sans prétendre l'établir.

Trois épreuves en découlent. D'abord, la phase géométrique de la cellule de Gray a pour module $\pi/2$, soit un décalage d'un quart de frange par rapport à un bras de référence sans boucle, et d'une demi-frange entre les deux sens ; l'épreuve vérifie, sur un effet connu et mesuré (la phase géométrique d'une boucle de déplacements), l'identification de la cellule de Gray au quart de la cellule de phase fondamentale. Ensuite, la réalisation doit produire une observable impaire sous renversement du temps, phase de Berry, circulation ou hélicité, et non une grandeur : une sélection reposant sur une grandeur achirale contredirait le théorème 6. Enfin, la phase doit rester $\pm\pi/2$ quelle que soit la dispersion, une dépendance résiduelle signalant une contamination dynamique non géométrique.

6 Ce que donne le spectre du générateur

La voie des aires orientées n'est pas la seule, et une seconde voie, plus directe, donne ce que la première ne donne pas.

Proposition 8 (Les valeurs propres de g sont les racines quatrièmes de l'unité). *Le cycle g est d'ordre quatre, donc son polynôme minimal divise $X^4 - 1$, et puisque g visite les quatre configurations son spectre est*

$$\text{Sp}(g) = \{1, i, -1, -i\}. \quad (18)$$

L'unité imaginaire n'est donc pas posée : elle est une valeur propre, forcée par l'ordre du cycle, et les vecteurs propres associés à $+i$ et $-i$ sont les deux chiralités identifiées par les aires. Cela importe pour la suite, car la phase relative entre ces deux vecteurs propres se révèle observable et non conventionnelle.

Théorème 9 (La phase relative est visible dans les probabilités). *Formons $\psi_\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_{+i} + e^{i\theta}v_{-i})$. Les distributions de probabilité sur les quatre configurations sont $(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ pour $\theta = 0$, uniforme pour $\theta = \pi/2$, et $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)$ pour $\theta = \pi$. Elles diffèrent, donc la phase relative n'est pas une convention.*

Cela fait basculer un régime, et non seulement ajouter un détail. Le critère de comptage de Hardy compare le nombre N d'états parfaitement distinguables au nombre K de paramètres d'un état général : $K = N$ est classique, un simplexe de mélanges, tandis que $K = N^2$ est quantique. Sur le sous-espace des chiralités $N = 2$, et un état général exige deux amplitudes complexes, donc $K = 4 = N^2$. Si la phase n'était qu'une convention on aurait $K = 2$, un segment de mélanges, donc un régime classique. C'est l'observabilité de la phase qui fait basculer.

Le même calcul sépare deux notions que le langage ordinaire confond. Un *mélange* exprime une ignorance : le système est dans un état ou dans l'autre, et l'on ne sait pas lequel. Une *superposition* n'exprime aucune ignorance : aucun des deux états n'est réalisé, et la relation entre eux est physique. Un mélange à parts égales des deux orbites donne la distribution uniforme quelle que soit la phase, et a pour pureté $\text{Tr}(\rho^2) = 1/2$; les superpositions ci-dessus donnent des distributions différentes et ont pour pureté un. La différence est un nombre, non une nuance d'interprétation.

Le substrat donne la seconde, et la raison en est exactement la matière des sections 3 à 5 : les deux orbites ont même action minimale, même durabilité, et aucune fonctionnelle achirale ne les sépare. Il n'y a donc *aucun fait* qui désigne l'une plutôt que l'autre. Ce n'est pas une ignorance, qui serait un mélange de pureté un demi ; c'est une absence de fait, et puisque la phase relative est observable, l'état est pur. Deux formulations courantes sont par conséquent fausses toutes les deux, et pour des raisons opposées : « être dans deux états à la fois » réalise trop, puisque aucun ne l'est, et « on ne sait pas lequel » réalise trop peu, puisque ce serait un mélange. L'énoncé correct est qu'aucun fait ne désigne l'un ou l'autre, et que la phase entre eux est physique. L'étrangeté se déplace en conséquence : elle n'est plus qu'un objet soit dans deux états, mais qu'il puisse n'y avoir aucun fait là où l'on attendait une alternative.

Une prémisse supplémentaire de l'intrication quantique découle du caractère binaire de la distinction établi en section 2.3. Une distinction sépare deux côtés, jamais trois ; deux entités peuvent partager une distinction, trois ne le peuvent pas. C'est exactement la monogamie de l'intrication [25], selon laquelle une paire maximalement intriquée exclut tout tiers. Un objet portant k distinctions peut être lié à k partenaires, mais par k distinctions différentes, jamais deux fois par la même, ce que l'on appelle le partage monogame : l'intrication se distribue, elle ne se duplique pas. Cela découle d'un décompte à N_{-1} et non d'un postulat quantique.

La portée de ces résultats doit être énoncée exactement, car une hypothèse est utilisée et il vaut mieux la nommer que la dissimuler. Écrire g comme *matrice* et former des combinaisons $v_{+i} + e^{i\theta}v_{-i}$ suppose déjà que les configurations se superposent. Le substrat ne fournit qu'une permutation sur quatre configurations, et rien en lui n'oblige à admettre leurs combinaisons linéaires. Cette hypothèse n'appartient pas à N_{-1} : elle est l'acte d'ouverture de N_0 . Les résultats de cette section sont donc conditionnels, mais la condition est unique, explicite et localisée. Ce n'est pas un emprunt honteux. Le programme ne dérive pas tout ; chaque passage entre niveaux comporte un *acte* non dérivé, dont seule la *nécessité* est montrée (une régularité observée sur les cinq passages, non un principe), et le passage des permutations à leur enveloppe linéaire est le premier de la série, celui dont tout le reste dépend : sans lui, pas de crochet de Lie, donc pas d'algèbre $\mathfrak{su}(2)$ des

commutateurs, d'où l'article N_0 tire ses trois générateurs. Ce que le programme exige d'un acte est que sa nécessité soit exhibée, non qu'il soit dérivé.

Un résultat voisin trouve ici sa place, car il n'utilise que des ressources déjà établies et constitue le seul endroit où le substrat produit la cohérence au lieu de l'emprunter. Les assemblages construits aux sous-niveaux supérieurs de N_{-1} peuvent partager des Dits, et le font génériquement, puisque rien n'oblige les assemblages à être disjoints. Or un Dit est une frontière n'appartenant à aucun des deux côtés, de sorte qu'un Dit partagé par deux assemblages est *un* objet, et non deux qui se ressemblent. L'espace des configurations conjointes n'est donc pas le produit cartésien mais le produit fibré au-dessus des configurations du Dit partagé. Ce sur quoi les deux assemblages doivent s'accorder est donné par l'homomorphisme de parité $\varepsilon : \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2, g^k \mapsto k \bmod 2$, qui sépare $\{D, L\}$ de $\{R, H\}$ et qui, sur les caractères de $\mathbb{Z}_4$, est porté précisément par les caractères fidèles $\chi_1(g) = i$ et $\chi_3(g) = -i$: la classe de parité est ce qui distingue les deux orientations d'un cycle. S'accorder sur un Dit partagé, c'est s'accorder sur la parité, ce qui divise par deux l'espace conjoint. Sur $\mathbb{C}$, un état conjoint M_{ab} s'annule alors dès que $a + b$ est impair et, en groupant d'abord les indices pairs, devient diagonal par blocs avec deux blocs de taille deux, de sorte que $\text{rang}(M) = \text{rang}(X) + \text{rang}(Y)$.

Théorème 10 (Cohérence de phase par partage d'un Dit). *Si un seul secteur de parité est occupé, des états factorisables existent et le rang un est atteint. Si les deux secteurs sont occupés, alors $\text{rang}(M) \geq 2$ et aucun état n'est factorisable.*

Les deux régimes sont exactement ce qu'on attendait. Avec une orientation définie, les assemblages restent séparables, chacun ayant la sienne : c'est le régime classique, sans cohérence. Avec des orientations superposées, la factorisation devient impossible, les deux assemblages ne possédant plus d'orientation séparément mais seulement ensemble, portée par la phase relative entre les secteurs. C'est là la définition même de la cohérence de phase, un accord d'orientations qui ne se réduit pas à la donnée de chaque orientation, et elle ne repose sur aucune analogie avec la cohérence ondulatoire. La construction fournit même une mesure : un état à deux secteurs dont les blocs sont de rang un a une entropie d'intrication dans $(0, \ln 2]$, maximale pour des secteurs équilibrés, de sorte que le degré de cohérence est l'équilibre entre les deux secteurs de parité et vaut au plus un bit, en accord avec le fait que le Dit partagé est une unité binaire.

7 La transition vers N_0

Toute l'architecture converge sur une question : comment un système logique pré-physique donne-t-il naissance à la physique ? La réponse tient en un seul principe. En notant $Nf_{x,k}$ l'instanciation successive des quatre fonctions à l'intérieur du niveau x , la fermeture d'un niveau est numériquement identique à l'ouverture du suivant,

$$Nf_{-1,4} = Nf_{0,0}, \quad (19)$$

de sorte que la Liaison qui referme N_{-1} ouvre l'espace fondamental de N_0 , le Bit, dans lequel la Reproduction lance le nouveau cycle. Il ne s'agit pas d'une identité entre deux instances distinctes situées de part et d'autre d'une frontière ; l'énoncé affirme qu'une seule et même instance, vue des deux côtés, est à la fois la fermeture d'un niveau et l'ouverture du suivant.

Trois conséquences en découlent, et elles concernent la nature de l'émergence dans ce programme. D'abord, il n'y a pas d'écart : ni intervalle, ni processus intermédiaire, ni cause externe ne sépare la fermeture de l'ouverture, de sorte que la transition entre niveaux n'est pas un saut effectué par un agent extérieur mais la même réalité structurelle lue successivement comme une fin et comme un commencement. Vue d'en bas, l'instance est la Liaison qui referme une algèbre épuisée ; vue d'en haut, elle est le Bit qui inaugure l'espace informationnel. Ensuite, si une même instance peut être lue depuis deux niveaux, c'est qu'un niveau est un sens de lecture plutôt qu'une couche ontologiquement séparée ; N_{-1} et N_0 ne sont pas deux mondes superposés mais deux modes d'intelligibilité d'une même réalité émergente. Enfin, l'égalité dissout une difficulté classique des théories de l'émergence, celle d'expliquer le passage d'un niveau à l'autre sans mécanisme causal externe. La réponse ici est qu'aucun mécanisme de ce genre n'est requis : la transition est inscrite structurellement dans l'épuisement de $\mathbb{Z}_4$ par ses quatre fonctions. Les quatre étantinstanciées, le groupe n'a pas de cinquième élément à offrir, et la seule continuation possible est l'ouverture d'un nouveau cycle dans un cadre plus riche. Ce qui force l'émergence est la finitude algébrique du substrat. L'article N_0

en donne la forme structurelle : le site est saturé dès le premier tour, un bit de plus est exclu, et des sites juxtaposés fragmentent la saturation en secteurs disjoints, de sorte que relier les sites est la seule issue.

Le remplissage est *discret* et non asymptotique, et la distinction est plus que terminologique. Dans une saturation asymptotique, un système approche d'un seuil sans jamais l'atteindre exactement, la transition est graduelle et le moment du basculement reste indéterminé. Ici le système instancie un nombre fini de fonctions et la transition a lieu au point exact où la dernière est instanciée : avant elle, N_0 n'existe pas ; après elle, N_0 est établi. La raison en est la finitude. Le groupe agit sur un espace fini, les valeurs de saturation sont des entiers exacts, et $g^4 = e$ est une identité algébrique et non une limite ; à N_{-1} il n'existe aucun paramètre continu le long duquel un seuil pourrait être approché, de sorte que la saturation asymptotique y est structurellement impossible. Le schéma rappelle, par analogie seulement, le principe d'exclusion, où une orbitale pleine force l'électron suivant vers la suivante par contrainte structurelle et non par débordement énergétique ; l'analogie encadre le mécanisme sans l'expliquer, puisque le principe d'exclusion découle de l'antisymétrie de la fonction d'onde fermionique et non d'un décompte de quatre éléments.

Une tension apparente doit être levée, faute de quoi deux énoncés s'excluraient : le remplissage est discret et s'achève avec la quatrième fonction, et pourtant la hiérarchie interne du substrat se poursuit, des assemblages se composant sur des assemblages sans limite. Les deux sont compatibles dès lors qu'on distingue la clôture fonctionnelle de la croissance des contraintes. Les quatre fonctions sont épuisées, et c'est en ce sens que l'ouverture de N_0 est nécessaire et immédiate ; mais rien n'empêche le substrat de continuer à composer sur ses propres produits. Ce que cette poursuite produit est un coût (une contrainte au sens d'écart ; les articles N_0 et N_1 appellent *gel* la grandeur qu'un niveau ne peut pas quitter, et N_1 appelle *gradient* cet écart). Plus les distinctions s'accumulent, plus il faut les tenir toutes ensemble, sans support pour les porter ni ordre où les situer, et le registre logique seul ne peut lever ces contraintes faute d'un lieu pour les héberger. L'émergence de N_0 est précisément la façon de les minimiser : dotées d'un espace, les distinctions n'ont plus besoin d'être tenues ensemble, seulement d'être situées. Le substrat ne déborde pas parce qu'il est plein, mais parce que rester logique devient trop coûteux. La fermeture algébrique dit *quand* la transition est possible ; la minimisation des contraintes logiques dit *pourquoi* elle a lieu.

Une propriété du substrat survit à la transition et mérite une mention séparée, car on la rapproche, par analogie seulement, de l'énergie du point zéro (le vide de l'article N_0 est autre chose, un vide ordonné, calculé, sans énergie). La structure de groupe interdit à la discernabilité de s'annuler simultanément sur toutes les configurations : la boucle nette vaut $\sigma = g^2 \neq e$, et les générateurs n'ont pas de point fixe, de sorte que toute boucle fermée qui n'est pas l'identité pure déplace au moins une configuration et possède une discernabilité strictement positive. En définissant la discernabilité résiduelle comme le minimum sur les boucles fermées non inertes,

$$\mathcal{D}_0 := \min_{\mathcal{L} \text{ fermée}} \mathcal{D}(\mathcal{L}) > 0, \quad (20)$$

on obtient un analogue formel de l'énergie du point zéro, et la dis-analogie doit être énoncée aussi nettement que l'analogie. L'énergie du point zéro est le plancher de l'espace des *états* : aucun état d'énergie nulle n'existe. Ici au contraire, la boucle inerte $L = e$ possède bien une discernabilité nulle, et $\mathcal{D}_0 > 0$ n'est une borne inférieure que pour les boucles non triviales, l'identité étant exclue non par décret mais parce qu'elle ne distingue rien et n'est donc pas un cycle. Ce que mesure $\mathcal{D}_0$ est l'activité minimale d'un cycle effectif. Le substrat ne crépite pas thermiquement : il ne se referme pas exactement. Toute projection de cette quantité sur la constante cosmologique serait un pas supplémentaire et spéculatif, qui n'est pas franchi ici.

L'émergence elle-même requiert trois conditions, et l'article N_0 dit comment il les remplit. Il faut un seuil critique : pour un site, c'est le tour complet des quatre configurations, atteint dès la première traversée, et pour le réseau l'article N_0 calcule un seuil de l'ordre, $J_c = 0,3395 \pm 0,0005$. Il faut un attracteur, analogue logique d'une brisure de symétrie : c'est le vide ordonné, qui choisit l'un des deux appariements courts du grain (calculé), sans toucher l'orientation $\pm i$. Il faut une métrique discrète, de sorte que l'espace naisse de la logique et non l'inverse, ce qui est cohérent avec les approches où la géométrie est construite à partir de quanta discrets [26, 27] : c'est l'arène plate de tétraèdres identiques (platitude démontrée, choix de l'arène posé comme prémisses), dont la signature reste indéterminée. L'ancrage des corrélations logiques dans des interactions physiques reste une hypothèse du programme. Le N_0 qui en résulte est donc une arène discrète, dont l'échelle est un étalonnage ; la limite continue n'y est pas construite, et le continu de la relativité générale en serait une approximation macroscopique. L'émergence n'élimine pas N_{-1} : elle le présuppose.

8 Ce qui réfuterait ce travail, et ce qui reste ouvert

Un modèle fondationnel n'a d'intérêt que s'il peut échouer. Les revendications faites ici sont étroites et, pour cette raison, vulnérables en des points précis. Quatre énoncés suffiraient à les réfuter, et les trois premiers se tranchent par calcul direct, sans expérience et sans interprétation.

- (i) **Un contre-exemple combinatoire.** Exhiber, sur $\{0, 1\}^2$, un cycle d'ordre quatre d'action de Hamming quatre qui ne soit pas de la classe de Gray ruinerait la sélection de la paire de générateurs, et avec elle toute la structure (proposition 3).
- (ii) **Une mesure achirale séparante.** Trouver une mesure invariante sous l'inversion du générateur et prenant des valeurs différentes sur les deux boucles contredirait le verrou (théorème 6) et rendrait superflu le recours à un signe.
- (iii) **Une phase autre que $\pm i$.** Obtenir, par la construction de Weyl de la section 5.2, une phase géométrique différente de $\pm i$ sur l'orbite de Gray invaliderait la clé proposée.
- (iv) **Une hiérarchie de niveaux sans conservation de la première fonction.** Le programme prédit que le capital émergent d'un niveau est le capital de la première fonction du suivant, et que les lois de transition relient des capitaux adjacents de ce type. Une transition inter-niveaux confirmée qui ne les relierait pas invaliderait ce principe, dont dépend la lecture unifiée des constantes.

Les trois premiers se vérifient en quelques lignes, et c'est délibéré. Le quatrième est d'une autre nature, relevant d'une interprétation de la physique établie plutôt que d'un calcul fini.

Ce qui est *établi* ici peut être récapitulé brièvement. La fermeture conservative est le critère premier du substrat, la durabilité en étant la projection une fois le temps donné. Le critère de Gray sélectionne à lui seul la paire de cycles miroir parmi les six, la forme axiale du carré et le profil de points fixes en étant des conséquences et non des conditions supplémentaires, et ce critère est l'unique cycle de moindre action de Hamming, minimalité qui est une unicité et non une optimisation. Les quatre fonctions sont les composantes de $\mathbb{Z}_4$, leur différenciation étant différée : les deux paires restent indifférenciées à N_0 , et c'est l'acte de N_1 , le choix de $\pm i$, qui sépare les générateurs en R et H et la paire involutive en D et L . La durabilité vaut un demi pour les deux boucles à N_{-1} et le reste ensuite, leurs compositions nettes étant le même élément g^2 . Aucune grandeur achirale ne les sépare (à N_0 , sous les deux prémisses de son verrou spectral), et le séparateur ne peut donc être que le signe de la phase géométrique, invariante de jauge et impaire sous renversement du temps. L'unité imaginaire est une valeur propre du générateur et non un ajout, la phase relative entre les deux vecteurs propres chiraux est observable, et la monogamie de l'intrication découle du caractère binaire de la distinction.

Ce qui reste *ouvert* est énoncé avec la même précision. La canonicité du critère se réduit à un unique principe logique, la raison suffisante pré-temporelle, tenue pour constitutive du substrat ; savoir si ce principe peut lui-même être fondé n'est pas tranché ici. La réalisation physique à N_1 est établie (phase $\pm\pi/2$ sur la cellule d'aire $h/4$ d'un mode, observable impaire sous renversement du temps, signe conventionnel) ; il reste à l'établir sur l'arène de N_0 elle-même. Les correspondances entre les quatre opérateurs et les interactions fondamentales, laissées de côté dans cette version abrégée, restent des analogies heuristiques sans valeur probante ; leur dérivation éventuelle relève des niveaux où émergent l'énergie et la masse. Les lectures énergétiques des grandeurs du substrat, telle une projection de la discernabilité résiduelle sur la constante cosmologique, sont héritées des niveaux supérieurs et non dérivées. Enfin l'unicité de deux bits comme espace minimal, établie ici comme conséquence du critère joint à l'exigence d'un groupe d'ordre quatre, reçoit dans l'article N_0 une dérivation plus directe (fidélité de l'action, binarité, raison suffisante, d'où exactement quatre configurations) ; ce qui reste ouvert est le statut de la raison suffisante elle-même.

9 Conclusion

Partant de la question de savoir d'où viennent les quatre fonctions fondamentales, cet article a montré qu'elles ne sont pas des axiomes arbitraires mais les seules structures réversibles durables sur l'espace minimal à deux

bits, sélectionnées sans aucune hypothèse physique par le seul critère de Gray, dont les deux compagnons usuels sont des conséquences algébriques et dont la canonicité est l'unicité des orbites primitives.

Le résultat le plus distinctif concerne le sort des deux boucles miroir, et il s'organise en une hiérarchie à trois niveaux qui est une exigence de cohérence et non une lacune. À N_{-1} elles sont indiscernables par toute grandeur symétrique, étant conjuguées par l'inversion du générateur, et leurs compositions nettes sont le même élément ; à N_0 aucune observable invariante ne les sépare, sous les deux prémisses du verrou spectral. Telle est la signature exacte d'une flèche du temps *sélectionnée* et non inscrite. La sélection effective ne peut donc avoir lieu qu'avec le choix d'une racine de -1 , à N_1 , et sa logique a été explicitée ici : un verrou établit qu'aucune grandeur achirale ne peut séparer les deux boucles, de sorte que la distinction ne peut être qu'un signe, et ce signe est la phase géométrique que l'orbite de Gray porte sur le plan de phase de Weyl, quantité impaire sous renversement du temps et invariante de jauge. Sa réalisation est établie à N_1 , et le signe retenu y est une convention qu'aucune observable ne lit.

Le statut épistémique de chaque énoncé a été gradué délibérément, car cette gradation est ce qui rend un programme falsifiable. Démontrés : la sélection par le critère de Gray, l'indiscernabilité par grandeurs symétriques et l'identité des compositions nettes, le verrou achiral, l'existence de deux boucles miroir séparées par une phase géométrique ; sous l'enveloppe linéaire, acte de N_0 , le spectre du générateur et l'observabilité de la phase relative. Établis à N_1 , et crédités ici : la réalisation de cette phase sur la cellule d'aire $h/4$ d'un mode, et le statut du signe, une convention. Analogies heuristiques sans valeur probante : les correspondances avec les interactions du modèle standard.

Si le modèle est correct, les structures de N_{-1} ne disparaissent pas dans la transition vers N_0 ; elles deviennent le substrat invisible de la physique. Chaque loi de conservation serait la projection d'un invariant logique, l'unitarité la projection de la bijectivité, la permanence des lois physiques la projection de la clôture du groupe, et la flèche du temps celle qui s'éloigne d'un état initial pur, nommée par un signe qui est le même partout et qu'aucune observable ne lit. La physique serait alors la logique de N_{-1} vue de l'intérieur de l'espace-temps qu'elle a elle-même engendré. Ce sont là des hypothèses du programme et non des conclusions établies ; les articles sur N_0 et N_1 en établissent une partie, et les suivants devront vérifier et compléter le reste.

Remerciements

Ce travail a été élaboré avec l'assistance de Claude, un modèle de langage développé par Anthropic, employé pour la vérification formelle, la révision éditoriale et la traduction. Le contenu scientifique, les thèses et les erreurs sont ceux de l'auteur, qui en assume l'entière responsabilité.

Références

- [1] Y. Kocher. Essai sur une théorie générale de la complexité : fondements de l'approche microGlobal. *IPI Letters*, 4(2):O112–O166, 2026. <https://doi.org/10.59973/ipil.362>
- [2] Y. Kocher. Émergence de la structure de l'espace-temps à partir d'un substrat logique. Le niveau informationnel du programme microGlobal (troisième volet). *IPI Letters*, 2026. Version longue : *Le grain et le vide*, octobre 2026, www.informationphysicsinstitute.org.
- [3] Y. Kocher. Émergence de l'onde, de l'énergie et du temps orienté. Le niveau N_1 du programme microGlobal. Version longue, 2026.
- [4] L. von Bertalanffy. *Théorie générale des systèmes*. Dunod, Paris, 2012.
- [5] N. Wiener. *La cybernétique : information et régulation dans le vivant et la machine*. Seuil, Paris, 2014.
- [6] H. Atlan. *Le vivant post-génomique ou qu'est-ce que l'auto-organisation ?* Odile Jacob, Paris, 2010.
- [7] I. Stengers et I. Prigogine. *La nouvelle alliance : métamorphose de la science*. Gallimard, Paris, 1986.
- [8] L. Brillouin. *La science et la théorie de l'information*. J. Gabay, Paris, 2000.

- [9] J.A. Wheeler. Information, physics, quantum: the search for links. Dans W.H. Zurek, éditeur, *Complexity, Entropy and the Physics of Information*, pages 3–28. Addison-Wesley, 1990.
- [10] M. Tegmark. *Our Mathematical Universe: My Quest for the Ultimate Nature of Reality*. Knopf, New York, 2014.
- [11] D. Deutsch. Constructor theory. *Synthese*, 190(18):4331–4359, 2013.
- [12] D. Deutsch et C. Marletto. Constructor theory of information. *Proceedings of the Royal Society A*, 471(2174):20140540, 2015.
- [13] S. Wolfram. *A New Kind of Science*. Wolfram Media, 2002.
- [14] L. Bombelli, J. Lee, D. Meyer et R.D. Sorkin. Space-time as a causal set. *Physical Review Letters*, 59(5):521–524, 1987.
- [15] R. Landauer. Irreversibility and heat generation in the computing process. *IBM Journal of Research and Development*, 5(3):183–191, 1961.
- [16] C.H. Bennett. Logical reversibility of computation. *IBM Journal of Research and Development*, 17(6):525–532, 1973.
- [17] C.H. Bennett. The thermodynamics of computation: a review. *International Journal of Theoretical Physics*, 21(12):905–940, 1982.
- [18] T. Toffoli. Reversible computing. Dans J.W. de Bakker et J. van Leeuwen, éditeurs, *Automata, Languages and Programming*, Lecture Notes in Computer Science, volume 85, pages 632–644. Springer, 1980.
- [19] E. Fredkin et T. Toffoli. Conservative logic. *International Journal of Theoretical Physics*, 21(3–4):219–253, 1982.
- [20] G. Spencer-Brown. *Laws of Form*. Allen & Unwin, Londres, 1969.
- [21] E. Noether. Invariante Variationsprobleme. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, pages 235–257, 1918.
- [22] F. Gray. Pulse code communication. *Brevet américain* 2 632 058, 1953.
- [23] R.W. Hamming. Error detecting and error correcting codes. *Bell System Technical Journal*, 29(2):147–160, 1950.
- [24] R. Penrose. *The Emperor’s New Mind: Concerning Computers, Minds, and the Laws of Physics*. Oxford University Press, 1989.
- [25] J.S. Bell. On the Einstein Podolsky Rosen paradox. *Physics*, 1(3):195–200, 1964.
- [26] A. Ashtekar. New variables for classical and quantum gravity. *Physical Review Letters*, 57(18):2244–2247, 1986.
- [27] C. Rovelli. *Quantum Gravity*. Cambridge University Press, 2004.