

Émergence de la distinction et du registre

Sélection du groupe $\mathbb{Z}_4$ par le code de Gray,
et verrou achiral sur l'orientation d'une boucle logique

Le substrat pré-physique N_{-1} du modèle microGlobal

Version 42 — longue

Yves Kocher

Octobre 2026

Abstract

Cet article, deuxième volet du programme microGlobal, construit le niveau N_{-1} : un substrat logique antérieur à l'espace-temps, à l'énergie et à l'information physique, où la réversibilité ne tient pas à une borne thermodynamique mais à l'absence d'extérieur.

Sur l'espace minimal à deux bits, un unique critère combinatoire (C1 : le code de Gray, un seul bit change par pas) sélectionne, parmi les vingt-quatre permutations, la paire de 4-cycles miroir {RDHL, RLHD}, soit le groupe $\mathbb{Z}_4$ et ses deux générateurs. Ce critère n'est pas postulé : C1 est l'unique boucle d'action de Hamming minimale, et cette minimalité est l'*unicité* des orbites primitives sous l'atomicité de la distinction, non une optimisation empruntée à la physique.

Restent alors deux boucles que rien ne sépare. On établit un *verrou* : aucune grandeur achirale, entropie comprise, ne peut les distinguer, puisqu'elles sont conjuguées par l'inversion $g \mapsto g^{-1}$. Leurs compositions nettes sont d'ailleurs le même élément du groupe ($\sigma = g^2$ pour l'une et l'autre, car $\mathbb{Z}_4$ est commutatif). À N_0 , le niveau de l'espace et de sa géométrie, le verrou est démontré à nouveau par une voie spectrale, sous deux prémisses énoncées : aucune observable invariante ne sépare les deux parcours. Aucune flèche du temps sélectionnée n'est donc inscrite dans le substrat. Ce qui les sépare ne peut être qu'un *signe* : la phase géométrique $\pm i$ que l'orbite de Gray porte sur le plan de phase de Weyl, quantité T-impair et gauge-invariante, égale à l'aire enclose — résultat conditionnel à l'enveloppe linéaire, qui est l'acte de N_0 . Sa réalisation comme phase géométrique relève de N_1 , le niveau où émerge l'énergie : elle y est établie, sur la cellule d'aire $h/4$ des deux quadratures d'un mode. Le choix du signe, lui, est une convention : N_1 démontre qu'aucune observable ne le lit.

Les revendications sont délibérément étroites et énoncées de façon à pouvoir échouer : trois des cinq réfutations proposées se vérifient par calcul fini sur $\{0, 1\}^2$.

Mots-clés : fondements de la physique ; modèles prégéométriques ; émergence de l'espace-temps ; calcul réversible ; portes logiques réversibles ; principe de Landauer ; groupe cyclique $\mathbb{Z}_4$; théorie des groupes finis ; code de Gray ; distance de Hamming ; théorie de l'information ; phase géométrique ; phase de Berry ; brisure de symétrie ; symétrie de renversement du temps ; flèche du temps ; chiralité.

Ce travail a été élaboré avec l'assistance de Claude, un modèle de langage développé par Anthropic. L'auteur assume l'entière responsabilité du contenu scientifique.

Contents

1	Introduction	5
1.1	Repères pour le lecteur	7
1.1.1	Guide de lecture de la version longue	7
1.1.2	Le concept microGlobal : une systémique fractale	7
1.1.3	Les quatre fonctions fondamentales	7
1.1.4	Les six niveaux systémiques	8
1.2	La grille, démontrée depuis le substrat	9
2	Principes fondateurs du programme : boucle, fonction, système et passage entre niveaux	12
2.1	La petite histoire de Jo : narration du mécanisme d'émergence	12
2.2	La boucle : mécanisme universel de capitalisation	14
2.3	Fonctions et systèmes : deux ontologies distinctes	15
2.4	La condition unique : saturation du capital et réaction en chaîne	16
2.5	Application à la hiérarchie microGlobal	18
2.6	Fonctions et dimensions : une correspondance à deux registres	19
2.6.1	Pourquoi N_{-1} et N_0 n'ont pas d'opérateur dominant	19
2.6.2	L'acte d'un niveau est sa fonction — et N_0 n'en a pas	19
2.6.3	Premier registre : les quatre dimensions se construisent à N_0	21
2.6.4	Second registre : chaque niveau apaise la contrainte d'une dimension	21
2.6.5	Ce qu'est positivement la contrainte d'une dimension	22
2.6.6	Deux échelles d'assignation, à ne pas confondre	24
2.6.7	L'écho entre les deux registres	25
2.6.8	N_{-1} : critère de discernabilité	25
2.6.9	Les critères de saturation aux niveaux supérieurs	25
2.6.10	N_0 : critère géométrique	25
2.6.11	N_1 : critère d'énergie ; l'onde comme manifestation de R	26
2.6.12	N_2 à N_4 : particule (D), forme (H), symbole (L)	26
2.7	Le nombre de tours d'une spirale	28
2.7.1	L'argument	28
2.7.2	Le contrôle sur les deux niveaux spiralés	28
2.7.3	La terminaison d'une spirale	28
2.7.4	Statut, réserves, réfutation	29
2.8	Ce que cet article établit dans ce cadre	30
3	Le niveau N_{-1} : le substrat logique fondamental	31
3.1	Statut ontologique du niveau N_{-1}	31
3.1.1	Positionnement : ce qui distingue cette approche	31
3.2	Discernabilité potentielle : définition unifiée	32
3.3	La frontière logique : l'acte primordial de discernabilité	34
3.4	Les quatre régimes de frontière et leur ancrage dans les principes R, D, H, L	36
3.4.1	Frontière de type R : le signe $\equiv$ et la reproduction de l'identique.	36
3.4.2	Frontière de type D : le signe $=$ et la différenciation qualitative.	37
3.4.3	Frontière de type H : le signe $\neq$ et la hiérarchisation.	37
3.4.4	Frontière de type L : le signe $\emptyset$ et la Liaison.	37
3.4.5	Les quatre régimes comme fondement logique des principes R, D, H, L	38
3.5	Les quatre opérateurs fondamentaux : préfigurations algébriques à N_{-1}	39
3.5.1	Non-commutativité : des primitives, non des éléments de $\mathbb{Z}_4$	40
3.6	Le calcul réversible : principes et fondements	40
3.7	Les portes logiques réversibles fondamentales	42
3.7.1	L'espace logique à deux bits : quatre configurations, quatre opérateurs.	42
3.7.2	Différenciation différée : ce qui émerge ici, ce qui se différencie plus haut.	46
3.7.3	Propriétés structurelles des quatre composantes de $\mathbb{Z}_4$	46
3.7.4	Propriété fondamentale : flux symétriques et asymétriques.	48
3.7.5	Relation avec les portes quantiques réversibles multi-qubits.	49
3.7.6	Synthèse : une seule porte engendre tout le système.	49

4	La genèse de la frontière : de l'indistinction au premier circuit	51
4.1	L'état d'indistinction : ce qui précède la première frontière	51
4.2	La boucle comme réduction de l'indétermination	52
4.3	Le premier partage : système et environnement	52
4.4	La hiérarchie des signes	53
4.5	Le premier circuit logique	53
4.6	Dédoublement, réseau, et croissance de la complexité	54
5	La boucle comme critère fondamental de N_{-1} : émergence de la durabilité à N_0	54
5.1	La boucle comme critère primordial de N_{-1}	54
5.2	La durabilité comme projection à N_0	56
5.3	Définition formelle des boucles logiques	56
5.4	Le principe de durabilité à N_0	56
5.5	Résultats de la mesure de durabilité	57
5.6	Propriétés formelles de la boucle RDHL	58
5.7	Architecture de la démonstration : trois résultats hiérarchisés.	58
5.8	Circuits réversibles composés et architecture hiérarchique de N_{-1}	61
5.9	Le principe de récursivité de R : l'identité émergente comme invariant trans-scalaire	61
5.10	Invariants et symétries de N_{-1}	62
5.10.1	Strate A : invariants universels du groupe G_k	63
5.10.2	Strate B : invariants spécifiques aux opérateurs	63
5.11	Tableau de synthèse des invariants	64
5.12	Récapitulation : l'escalier interne de N_{-1}	64
5.13	La cohérence de phase, construite : ce que produit le partage d'un Dit	65
5.13.1	Le point de départ : un Dit partagé est <i>un</i> Dit	65
5.13.2	Ce sur quoi deux assemblages s'accordent : la classe de parité	65
5.13.3	Le théorème : la superposition des orientations interdit la factorisation	66
5.13.4	Degré de cohérence	66
5.13.5	Ce que cette construction change, et ce qu'elle ne change pas	67
6	Programme pour N_1 : de l'indistinguabilité à la phase géométrique	67
6.1	Le verrou : aucune grandeur ne sépare les deux boucles	67
6.2	La clé : un signe, porté par une phase géométrique	68
6.3	La réalisation à N_1 : une phase de Berry	69
6.4	Ce que N_0 transmet à N_1 : la dette exacte	70
6.4.1	L'ordre entre la dispersion et le i : un seul acte	71
6.5	Le choix du signe : une convention	72
7	Déséquilibre structurel et minimisation : le moteur de la complexification	73
7.1	L'équilibre comme piège logique	73
7.2	Le déséquilibre comme propriété structurelle de RDHL	73
7.3	La relation $RL = DH$: deux stratégies évolutives	74
7.4	La seconde relation $RD = HL$: la stratégie hétérogène	75
7.5	Le déséquilibre comme moteur logique de la complexification	75
7.6	La minimisation des contraintes : concept général	75
7.7	Les quatre boucles de minimisation : la réaction en chaîne complexe et entropique	76
7.8	La minimisation à chaque niveau systémique	79
7.9	Le passage entre niveaux comme minimisation de saturation	81
7.10	Le moteur de l'évolution à N_0 : minimisation des contraintes spatiales et temporelles	81
7.10.1	Dérivation depuis N_{-1} : la variation temporelle comme pont formel	81
7.10.2	Les deux dynamiques fondamentales et leur moteur dialectique	83
8	Transition vers le niveau N_0 : émergence de la physique depuis la logique	84
8.1	Le principe $Nf_{-1.4} = Nf_{0.0}$	84
8.2	Le vide logique n'est pas vide : la discernabilité résiduelle $\mathcal{D}_0$	85
8.3	Ce qui s'accumule à N_{-1} : le potentiel logique pur Π	85
8.3.1	Pourquoi ce n'est pas de l'entropie	85
8.3.2	Définition axiomatique	86
8.3.3	Deux composantes, et pourquoi elles sont deux	86
8.3.4	Π comme précurseur indifférencié	86
8.3.5	Articulation avec $\mathcal{D}_0$	87
8.4	Remplissage discret et conditions d'émergence	87

8.5	Le déclencheur : auto-référence critique et cristallisation	88
8.5.1	Une stabilité sous tension	88
8.5.2	Le seuil d'auto-référence	88
8.5.3	Deux saturations, deux objets	89
8.5.4	La cristallisation comme transition de phase logique	89
8.5.5	Le mécanisme en trois temps	90
8.6	Les trois lectures de la transition : une synthèse	90
8.7	La structure de N_0 héritée de N_{-1}	91
8.8	Les noyaux de cristallisation : du site de proto-information au spin	93
8.8.1	Le site de proto-information	93
8.8.2	Pourquoi ces sites sont des noyaux	93
8.8.3	Le mécanisme en trois temps	93
	Bilan critique	94
9	Le spectre de g : d'où vient le i, et pourquoi la phase compte	98
9.1	Le spectre est forcé	98
9.2	La phase relative est observable	99
9.3	La superposition : ce qu'elle est, et ce qu'elle n'est pas	100
9.4	Ce que cette section fonde : l'intrication quantique	101
10	Conclusion : N_{-1} comme substrat invisible de tous les niveaux	102
A	Le programme microGlobal : vue d'ensemble	105
B	Phase géométrique discrète de l'orbite de Gray	109
C	Le critère C1 : sélection, minimalité, fondement	112
D	Invariant B.V : développement formel de la non-commutativité	114
E	Compléments formels : discernabilité et durabilité	115
F	Architecture hiérarchique des sous-niveaux de N_{-1}	117
G	Prolongement : la hiérarchie des niveaux comme thermodynamique généralisée	119
H	Formalisation du capital $\mathcal{C}_x$ et de la condition de saturation, niveau par niveau	121
I	La Rupture comme perturbation fondatrice : le mécanisme des passages supérieurs	123
J	Programme de dérivation formelle de la correspondance RDHL / interactions	124
K	Index des notations	126
L	Statut épistémique des énoncés	127
M	Vérifications calculatoires	128

1 Introduction

Convention de lecture : successions logiques, non temporelles

Tout le vocabulaire de *succession* employé dans cet article (« puis », « prépare », « réaction en chaîne », « étape ») dénote un **ordre de dépendance logique** (l'ordre partiel qu'induit la génération des structures les unes à partir des autres), et *jamaïs* une chronologie. À N_{-1} il n'y a pas encore de temps : écrire g^1, g^2, g^3 ne décrit pas trois instants mais trois *degrés de composition* d'un même générateur. La succession temporelle est un phénomène **dérivé**. Le niveau N_0 ne porte encore qu'un axe d'ordre, sans orientation ni dynamique ; la succession orientée n'apparaît qu'à N_1 , comme instantiation de cet ordre logique. Puisque le temps est ici un *résultat*, toute lecture chronologique du substrat serait une pétition de principe.

Situer cet article dans le programme microGlobal. Cet article est le **deuxième volet** du programme microGlobal, annoncé dès l'introduction du premier volet [1]. Le troisième volet traite le niveau N_0 [2]. Le programme s'inscrit dans le prolongement de trois traditions convergentes : la systémique générale [32, 33], la thermodynamique des structures dissipatives [34] et la théorie de l'information [35]. Il propose une **troisième génération** de l'approche systémique : après la cybernétique de première génération (régulation, information, totalité [36]) et l'auto-organisation de deuxième génération (systèmes ouverts, néguentropie [37]), la *systémique fractale* étend la notion de système à l'ensemble de la nature (du quanta d'espace-temps au système social) en se concentrant sur la **typologie des flux**.

Le présent article relève d'un *registre structurel* : son noyau est une algèbre finie (le groupe $\mathbb{Z}_4$), dont les relations se démontrent ; les correspondances avec la physique qu'il mobilise interviennent à titre d'**analogies**, non de dérivations empiriques.

Le programme n'étant pas encore connu, le lecteur qui l'aborde par cet article trouvera en annexe A une vue d'ensemble de trois pages : la question dont microGlobal procède, la genèse des quatre fonctions R, D, H, L , et l'inventaire précis de ce que le présent article emprunte au cadre général. Cette annexe indique aussi, et c'est peut-être l'essentiel, *ce dont les résultats démontrés ici ne dépendent pas*.

Le **premier volet** [1] a introduit le cadre systémique. Elle caractérise tout système auto-organisé par quatre *fonctions fondamentales* (Reproduction (R), Différenciation (D), Hiérarchisation (H), Liaison (L)) déterminées par trois variables relationnelles : la *hiérarchie* entre éléments, la *réciprocité* des flux et la *temporalité* des échanges. Ces fonctions opèrent à travers cinq niveaux empilés de réalité (N_0 à N_4), chacun caractérisé par un capital émergent spécifique : information (espace-temps, N_0), énergie (ondes, N_1), masse (particules, N_2), formes topologiques (biologie, N_3) et symboles (social, N_4). Les transitions inter-niveaux y sont lues comme des *taux de change* entre capitaux successifs : $\kappa_1 = k_B T$ (le $\ln 2$ de Landauer appartenant à l'énoncé, non au taux), $\kappa_2 = c^2$ (Einstein), $\kappa_3 = c^4/G$, $\kappa_4 = k_B T \ln 2$, de statut inégal (annexe A) et non redérivées ici. La boucle $R \rightarrow D \rightarrow H \rightarrow L$ y est posée comme moteur universel de la complexification : une réaction en chaîne où chaque fonction prépare le substrat de la suivante, les systèmes se complexifiant au détriment de l'entropie de leur environnement. Ce report a un mécanisme précis : la boucle se parcourt dans deux sens, et c'est la boucle *inverse* $R \rightarrow L \rightarrow H \rightarrow D$ qui, tournant au dehors, dégrade l'environnement à mesure que RDHL construit le système. Complexité et entropie sont ainsi les deux orientations d'un même cycle, non deux principes distincts. La distinction entre *capital actif* (dynamique productive) et *capital passif* (accumulation statique) y est introduite, de même que la mesure de complexité $\mathcal{C} = C_R \times C_D \times C_H \times C_L$: un seul capital nul annule la complexité, l'équilibre des quatre fonctions définit la durabilité.

Les **volets suivants** appliquent ce cadre niveau par niveau. Le troisième volet traite N_0 , le passage où des distinctions logiques deviennent une géométrie [2]. Les suivants traitent N_1 (l'onde, l'énergie et le temps orienté [3]), puis N_2 (la matière) et N_3 (les formes). Ils établissent la correspondance structurelle entre la boucle RDHL et les couches successives du modèle quantique, ainsi qu'avec plusieurs cycles canoniques de la physique (cycle de Carnot, cycle de Beau de Rochas, principe de Landauer, fer à cheval de Smale), quiinstancient tous, à des niveaux distincts, la même structure à quatre opérations.

La question fondationnelle. Le premier volet laisse ouverte une question fondamentale : *d'où viennent les quatre fonctions elles-mêmes ?* Il les a posées comme axiomes, justifiés a posteriori par leur pouvoir descriptif trans-scalaire. Ce deuxième volet les *reconstruit* sous un critère combinatoire intrinsèque. Elle descend sous N_0 pour atteindre le niveau N_{-1} (le substrat logique pré-physique, antérieur à l'espace-temps et à l'information physique) depuis lequel les quatre fonctions émergent comme les seules structures durables sur un espace à deux bits.

Quatre acquis du premier volet sont directement mobilisés dans la suite :

- (1) Les quatre fonctions R, D, H, L sont des opérateurs logiques réversibles agissant sur des configurations discrètes, propriété qui les rend candidates naturelles à une caractérisation algébrique.

- (2) La boucle $R \rightarrow D \rightarrow H \rightarrow L$ est le moteur universel de la complexification : c'est sa propriété de *fermeture conservative* qui est le capital.
- (3) N_0 est un capital d'information encodé dans les quantas de l'espace-temps, ce qui suggère que la couche immédiatement sous-jacente doit être de nature logique, non physique.
- (4) L'origine des quatre fonctions reste ouverte, c'est cette ouverture que cet article vient combler.

D'où viennent les quatre fonctions ? Sous un unique critère combinatoire intrinsèque (le code de Gray) (sans aucun emprunt à la physique) une unique paire de structures se distingue parmi les vingt-quatre permutations possibles sur $\{00, 01, 10, 11\}$. Ces structures forment le groupe $\mathbb{Z}_4$, dont la boucle génératrice est $R \rightarrow D \rightarrow H \rightarrow L$. La qualification de « seules transformations réversibles durables » sous ce critère est établie à la section 4 (les critères auxiliaires C2 et C3 en sont des conséquences) ; la canonicité du critère lui-même est précisée sous C1 (cf. §4 et annexe) : C1 est l'unique boucle d'action de Hamming minimale, conséquence de l'atomicité de la distinction (Annexe C). La proposition centrale est que les fonctions fondamentales ne sont pas un postulat descriptif, mais la *seule solution combinatoire* au problème de la durabilité sur un espace logique minimal à deux bits, *sous le critère de fermeture en boucle* (C1). La figure 1 en donne la vue d'ensemble.

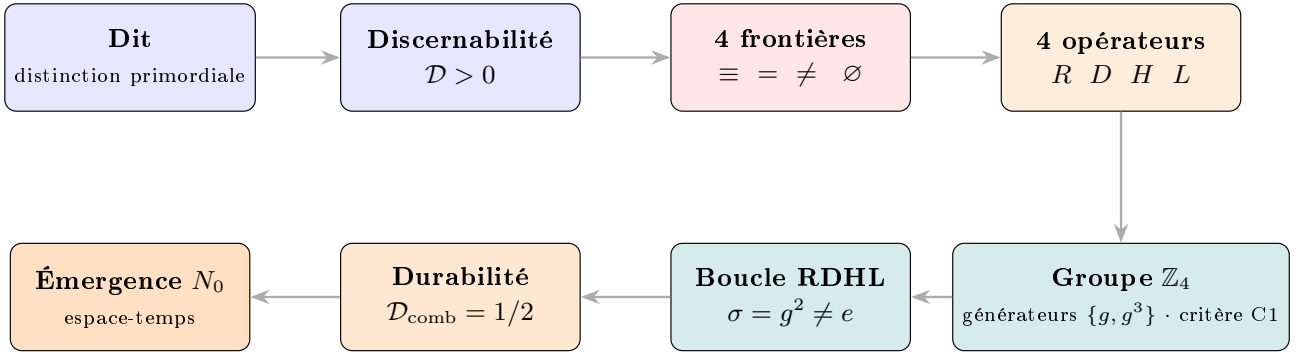


Figure 1: Carte logique de N_{-1} , du Dit à l'émergence de l'espace-temps (à lire en serpent). Le Dit fonde la discernabilité, qui se décline en quatre frontières puis en quatre opérateurs ; ceux-ci forment le groupe cyclique $\mathbb{Z}_4$, dont C1 sélectionne la *paire* de générateurs miroir $\{g, g^3\}$ (et non l'un des deux : aucune des deux orientations n'est privilégiée à N_{-1} , §3.2), d'où la boucle RDHL et son inverse RLHD, de fermeture dynamique $\sigma = g^2 \neq e$, jusqu'à l'émergence de N_0 . La carte suit l'ordre *démonstratif* de l'article ; l'ordre de *déploiement* du substrat, palier par palier, fait l'objet de la figure 16.

Pourquoi $\mathbb{Z}_4$, et non le groupe de Klein ?

Les opérations *naturelles* sur deux bits ne forment pas $\mathbb{Z}_4$. Les **retournements de bit** (flip b_0 , flip b_1 , flip des deux, identité) forment le **groupe de Klein** $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, où tout élément est sa propre involution et qui ne contient *aucun* élément d'ordre 4 ; la symétrie complète du carré $\{00, 01, 11, 10\}$ est le **diédral** D_4 (ordre 8). $\mathbb{Z}_4$ n'apparaît donc *pas* comme « le » groupe des opérations binaires : il se sélectionne dès qu'on **privilégie la rotation** (le 4-cycle de Gray) parmi les éléments de D_4 . Ce choix n'est pas arbitraire ; il *est* la thèse du modèle, qui porte sur les **processus fermés** (les boucles), non sur les symétries statiques. L'unicité revendiquée est donc **relative aux structures de boucle**, non absolue : énoncée comme « $\mathbb{Z}_4$ est la seule algèbre sur deux bits », elle serait fausse.

Un avertissement essentiel. Les noms R, D, H, L dans cet article désignent les composantes de $\mathbb{Z}_4$ en nommant d'avance ce qu'elles deviendront : leur différenciation sémantique pleine ne se réalise qu'aux niveaux supérieurs. Les deux paires $\{g^1, g^3\}$ et $\{g^2, g^4\}$ restent indifférenciées à N_0 ($R = H, D = L$, au sens de l'indifférenciation et non d'une identité d'opérateurs) ; c'est l'acte de N_1 , le choix de $\pm i$, qui les différencie en R et H , en D et L . Les noms sont utilisés **par anticipation** dans tout l'article.

Continuité fractale avec le premier volet. La propriété *fractale* du modèle, énoncée dans le premier volet, prend ici son sens le plus strict. À la différence des fractales géométriques de Mandelbrot [29], dont la courbe de Von Koch est un exemple emblématique, l'objet mathématique décrit par microGlobal n'est pas géométrique mais *systémique* : c'est la même structure à quatre opérateurs qui se répète à toutes les échelles, avec des capitaux différents. La construction de N_{-1} rend cette propriété rigoureuse : les opérateurs algébriques de $\mathbb{Z}_4$ sont l'invariant trans-scalaire fondamental, le capital de chaque niveau étant la projection de cet invariant sur un milieu spécifique. Ce qui était analogie structurelle dans le premier volet devient ici *identité algébrique*.

Architecture de l'article. Les chapitres 3–4 construisent N_{-1} : statut ontologique, discernabilité potentielle, frontière logique, quatre opérateurs. Le chapitre 4 établit la paire de boucles de Gray (RDHL et son inverse) comme seule fermeture conservative, l'architecture hiérarchique des sous-niveaux, et la correspondance avec les interactions fondamentales. Les chapitres 5–7 décrivent la transition $N_{-1} \rightarrow N_0$: déséquilibre dynamique, minimisation des contraintes spatiales et temporelles (principe moteur unifié qui relie complexification du système et entropification de l'environnement) et émergence de la physique.

1.1 Repères pour le lecteur

Ce chapitre s'adresse au lecteur qui aborde cet article sans avoir lu le premier volet. Trois acquis suffisent : (1) les quatre fonctions R , D , H , L et la boucle $R \rightarrow D \rightarrow H \rightarrow L$; (2) les six niveaux N_{-1} à N_4 et leur capital émergent ; (3) la complexité $\mathcal{C} = C_R \times C_D \times C_H \times C_L$.

1.1.1 Guide de lecture de la version longue

Cet article est long, et il l'est pour une raison : il rassemble un noyau démontré, un cadre programmatique qui lui donne son sens, et une matière pédagogique qui en rend l'accès possible. Ces trois registres n'appellent pas la même lecture, et il vaut mieux le dire d'emblée que de laisser le lecteur les découvrir en chemin. Trois parcours sont donc proposés.

Le parcours démontré. C'est le cœur de l'article, et tout le reste en dépend sans réciproque. Il se lit en cinq temps : le statut du substrat et la raison structurelle de sa réversibilité (§3.1) ; la discernabilité potentielle, avec sa primitive orientée δ et son ombre symétrique (§3.2) ; la sélection de $\mathbb{Z}_4$ par le seul critère de Gray et sa canonicité comme moindre action de Hamming (§3.7 et annexe C) ; la boucle, ses deux fermetures et l'indiscernabilité des deux orientations (§5) ; le verrou achiral et la phase géométrique (§6 et annexe B). S'y ajoutent deux résultats indépendants de la chaîne principale : la cohérence de phase construite à partir d'un Dit partagé (§5.13) et ce que livre le spectre de g (§9). Ce parcours seul constitue une lecture complète et suffisante.

Le parcours programmatique. Il rassemble ce que l'article *parie* plutôt que ce qu'il établit, et le lecteur pressé peut l'omettre sans rien perdre des démonstrations. On y trouve le potentiel logique Π et son articulation à $\mathcal{D}_0$ (§8.3) ; le déclencheur de la transition, seuil d'auto-référence et bifurcation (§8.5) ; les noyaux de cristallisation (§8.8) ; les critères de saturation aux niveaux supérieurs (§2.6.9) ; la conjecture d'isomorphisme trans-niveaux et ses corollaires (§8.8.3) ; enfin les annexes G, H, I et J. Chacune de ces sections porte un encadré qui gradue son statut ; le tableau 20 les récapitule tous.

Le parcours narratif. Pour un premier contact, deux textes valent mieux qu'une définition : l'histoire de Jo (§2.1), qui raconte le mécanisme depuis l'intérieur, et la genèse de la frontière (§4), qui reconstruit sans formalisme le passage de l'indistinction au premier circuit. Ils simplifient l'un et l'autre, et disent où.

Deux instruments de navigation complètent ce guide. Le tableau 20, en fin d'annexes, donne pour chaque énoncé son statut, ce dont il dépend et ce qui le réfuterait ; l'annexe K récapitule les symboles. Le lecteur qui reprend le texte en son milieu gagnera à commencer par l'un ou par l'autre.

1.1.2 Le concept microGlobal : une systématique fractale

Le modèle microGlobal part d'une question simple : pourquoi l'univers a-t-il produit des structures de plus en plus complexes plutôt qu'une soupe homogène ? Sa réponse : il existe une logique universelle trans-scalaire qui oriente tous les systèmes vers la minimisation de leurs contraintes, et cette minimisation produit nécessairement la complexité. La même logique opère à toutes les échelles, avec des capitaux différents : c'est la propriété fractale du modèle.

1.1.3 Les quatre fonctions fondamentales

Tout système auto-organisé est caractérisé par quatre fonctions, déterminées par trois variables : hiérarchie, réciprocité, temporalité.

- **R : Reproduction** : flux asymétrique sortant, sans réciprocité. Le système transmet son identité. *Ex.* : division cellulaire, propagation d'une onde.
- **D : Différenciation** : flux réciproques égaux. Le système échange et se spécialise. *Ex.* : échange commercial, réaction chimique.
- **H : Hiérarchisation** : flux asymétrique entrant. Le système prélève, s'organise. *Ex.* : prédation, bénéfice.
- **L : Liaison** : flux internes réciproques, flux externe nul. Le système crée des liens internes et clôt sa frontière. *Ex.* : lien chimique, membrane cellulaire.

Comment trois variables produisent quatre fonctions. Les trois axes ne se combinent pas *librement* (ce qui donnerait $2^3 = 8$ cas) mais en **arbre de décision**, où chacun ne tranche qu'une bifurcation. Les quatre feuilles sont alors exactement R, H, D, L :

Fonction	Réciprocité	Hiérarchie	Temporalité
R	non	flux sortant	:
H	non	flux entrant	:
D	oui	:	échange externe (dans le temps)
L	oui	:	clôture (flux externe nul)

La *réciprocité* sépare d'abord les flux asymétriques $\{R, H\}$ des flux réciproques $\{D, L\}$; puis la *hiérarchie* (sens du flux) distingue R (sortant) de H (entrant) au sein des asymétriques, tandis que la *temporalité* (échange ouvert *vs* clôture) distingue D (échange qui se déploie dans le temps, flux externe non nul) de L (clôture atemporelle, flux externe nul) au sein des réciproques. Chaque axe n'intervient donc que là où il discrimine : d'où quatre fonctions, et non huit. (*Cette caractérisation est héritée du premier volet [1] ; on la rend ici explicite.*)

Ces quatre fonctions sont nécessaires et suffisantes : sans l'une, le système ne peut être durablement auto-organisé.

Une distinction fondamentale sépare L des trois autres. R, D et H engendrent des flux *entre le système et son environnement* (sortant pour R , échangé pour D , entrant pour H) qui tous *traversent la frontière*. L seul n'engendre que des flux *internes au système* : il relie ses éléments entre eux et clôt la frontière, sans rien échanger au-dehors (flux externe nul). En un mot, R, D et H sont **transactionnels** ; L est **constitutif**.

Pour le lecteur : les quatre fonctions comme des flux

Prenons une cellule, ou une entreprise. Dans les deux cas une frontière (la membrane, ou les murs et les contrats) sépare un dedans d'un dehors, et des flux la traversent ou restent à l'intérieur. Le programme classe ces flux en quatre fonctions (figure 2).

R (Reproduction) est un flux qui sort : le système propose son identité au dehors (la cellule se divise, l'entreprise vend un produit qui porte sa marque). H (Hiérarchisation) est un flux qui entre : le système prélève et s'organise avec ce qu'il a pris (la cellule absorbe des nutriments, l'entreprise encaisse). D (Différenciation) est un échange réciproque, qui va dans les deux sens (un commerce, une réaction chimique). L (Liaison) reste à l'intérieur : il noue les liens internes et referme la frontière (la membrane elle-même, la cohésion d'une équipe) ; vers le dehors, son flux est nul en valeur.

On voit alors deux familles. R et H vont dans un seul sens, et ces sens sont opposés : c'est le même axe, parcouru vers le dehors ou vers le dedans. D et L sont réciproques : ils reviennent sur eux-mêmes, et forment un second axe. Dans le substrat N_{-1} , il n'y a que ces deux axes. L'algèbre y dit que H est l'inverse de R , mais aucune grandeur de ce niveau ne permet de dire lequel des deux sens est la sortie ; de même, le niveau ne fixe pas lequel des deux éléments du second axe joue le rôle de L . C'est l'acte de N_1 , le choix de $\pm i$, qui sépare R de H et D de L .

En une phrase : à la base il n'y a que deux axes de flux, parcourables dans les deux sens, et les quatre fonctions ne se séparent qu'aux niveaux supérieurs.

Remarque 1 (Statut à N_{-1}). À N_{-1} , ces quatre fonctions existent comme préfigurations structurelles : les composantes de $\mathbb{Z}_4$ en possèdent les propriétés algébriques, mais leur différenciation sémantique ne se réalise qu'aux niveaux supérieurs.

La boucle de complexification $R \rightarrow D \rightarrow H \rightarrow L \rightarrow R$ est le moteur universel : une forte identité (R) est le substrat de la différenciation (D) ; un système différencié doit être organisé (H) ; une hiérarchie forte crée le besoin de lien (L) ; un réseau cohérent renforce la reproduction (R).

La complexité : $\mathcal{C} = C_R \times C_D \times C_H \times C_L$. Un seul capital nul annule la complexité ; l'équilibre des quatre fonctions est la condition de la durabilité.

1.1.4 Les six niveaux systémiques

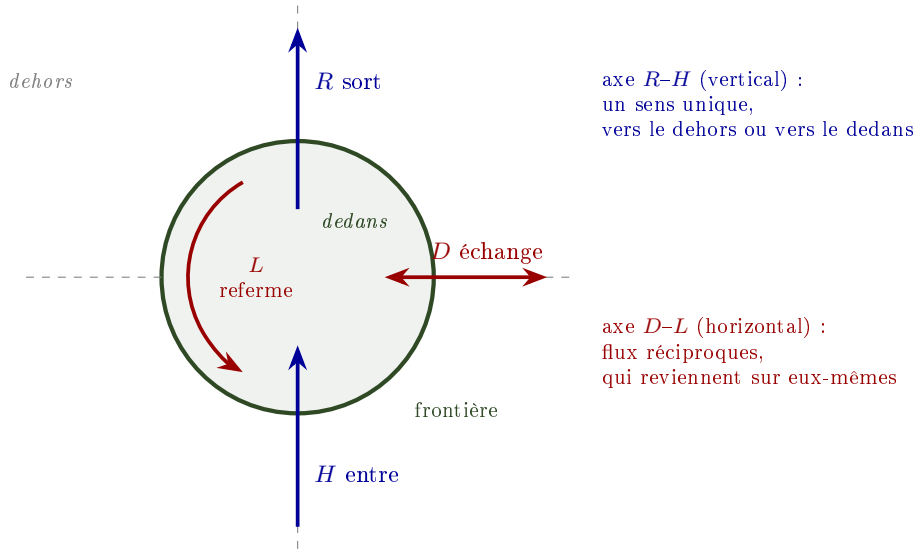


Figure 2: Un système et sa frontière. R sort et transmet l'identité, H entre et organise : ils forment un même axe parcouru dans deux sens (R en haut, H en bas). D échange dans les deux sens à travers la frontière, L circule à l'intérieur et la referme : ils forment le second axe, celui des flux réciproques (D à droite, L à gauche), selon l'orientation commune à tous les volets. À N_{-1} , seuls ces deux axes existent ; la séparation en quatre fonctions distinctes vient avec le choix de $\pm i$, à N_1 .

1.2 La grille, démontrée depuis le substrat

Les articles supérieurs emploient deux énoncés qu'ils déclarent « thèses de contenu » : la **grille des quatre fonctions** et l'**unicité de l'acte par niveau**. *Tant qu'ils n'ont pas de démonstration ici, tout usage qu'un niveau en fait est circulaire* — la grille résumerait les résultats des niveaux, et les niveaux s'appuieraient sur la grille. **Or les deux se lisent sur l'algèbre du substrat**, et c'est ce que cette sous-section établit, avec la règle de passage dont ils dépendent.

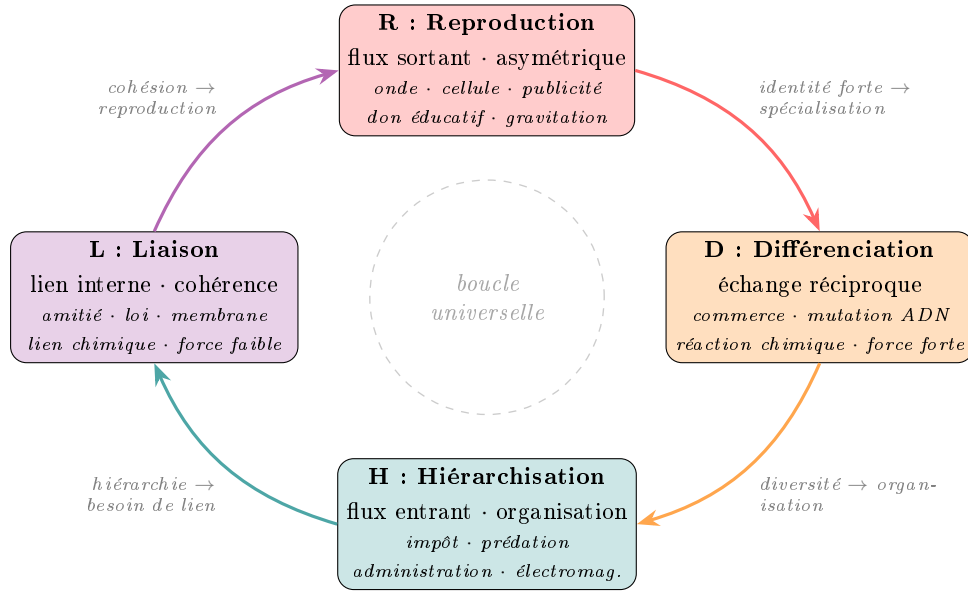
Théorème 1 (Les trois bifurcations de la grille sont trois invariants de $\mathbb{Z}_4$). Soit $\mathbb{Z}_4 = \{e, g, g^2, g^3\}$ le cycle du substrat, et $K : x \mapsto x^{-1}$ l'inversion. Les trois bifurcations de la grille (§1.1.3) sont réalisées par trois invariants algébriques :

- (a) **réciprocité** = être fixe sous K : $\text{Fix}(K) = \{e, g^2\}$, et son complément $\{g, g^3\}$ est une seule orbite de K — d'où la première séparation, $\{L, D\}$ contre $\{R, H\}$;
- (b) **hiérarchie** = l'orientation, seule chose qui sépare g de g^3 ;
- (c) **temporalité** = dans $\text{Fix}(K)$, le neutre contre l'involution : e est le seul élément sans effet, g^2 la seule involution non triviale.

Ce qui n'est pas établi ici, et qu'il faut dire : l'étiquetage à l'intérieur de chaque paire. Lequel de g et g^3 est R , et lequel de e et g^2 est L , ne se lit sur aucun invariant de ce niveau — c'est la différenciation différée (§3.7.2) : les deux orientations sont indiscernables ici, et distinguer la réciprocité instantanée de la coprésence durable suppose une métrique temporelle que ce niveau n'a pas. L'algèbre donne la partition ; elle ne donne pas les noms.

Et la clôture de la liste est relative : une fonction est un élément du cycle, et $|\mathbb{Z}_4| = 4$ — mais $\mathbb{Z}_4$ lui-même est retenu sous la thèse des processus fermés (la symétrie complète du carré est D_4 , d'ordre 8 ; l'encadré correspondant le dit). $\{0, 1\}^2$ est le plus petit espace qui porte ces quatre opérateurs (Prop. 5) — ce qui interdit de faire avec moins, non d'avoir plus. « Pas de cinquième fonction » est donc vrai modulo cette thèse, et la complétude de la paire de pôles est celle du Lem. 5.

Démonstration, et vérification `verif_Nm1_grille_Z4.py`. $x = x^{-1}$ équivaut à $x^2 = e$, d'où $\text{Fix}(K) = \{e, g^2\}$; g et g^3 sont échangés par K et forment donc une orbite unique ; e est le seul neutre et g^2 la seule involution non triviale. L'arbre de décision de §1.1.3 opère trois bifurcations, et les trois invariants ci-dessus les réalisent — la partition est donc la même ; le script n'établit que cette partie algébrique, l'identification des flux aux éléments étant une lecture, non un calcul. Sur $\{0, 1\}^2$ en code de Gray, ψ (transposition des bits) réalise $K : \psi g \psi^{-1} = g^{-1}$ (Thm. 5). $\square$



La boucle $R \rightarrow D \rightarrow H \rightarrow L \rightarrow R$ est le moteur universel de la complexification.

Figure 3: La boucle de complexification RDHL (R en haut, D à droite, H en bas, L à gauche, comme dans tous les volets).

Complément : l'étiquetage des paires est *impossible* à ce niveau

Le théorème précédent déclare sa limite : « lequel de g et g^3 est R [...] ne se lit sur aucun invariant de ce niveau ». On peut dire davantage : aucune donnée supplémentaire, quelle qu'elle soit, ne peut lever cette dégénérescence tant que l'orientation du cycle reste libre.

Lemme 1 (Impossibilité interne de l'étiquetage). Soit X un ensemble quelconque muni d'une involution φ — la donnée ajoutée et sa symétrie propre — et soit $\tau = (K, \varphi)$ l'involution simultanée sur $\mathbb{Z}_4 \times X$ (inverser le cycle et appliquer φ). Si $\alpha = (K, \text{id})$ est également une symétrie — c'est-à-dire si l'orientation du cycle est libre, ce qu'affirme le Thm. 1 en déclarant les deux orientations indiscernables, et ce que confirme la Prop. 5 (iii) — alors le groupe $\langle \tau, \alpha \rangle$ contient $\tau\alpha = (\text{id}, \varphi)$, agit donc **composante par composante**, et ses orbites sont exactement

$$(\mathbb{Z}_4/K) \times (X/\varphi), \quad \text{soit } 3 \times |X/\varphi| \text{ classes.}$$

En particulier la paire $\{g, g^3\}$ n'est **jamais** scindée, quelle que soit X .

Démonstration, et vérification `refonte/verif_arbitrage_initiateur.py`, bloc V14. α et τ commutent ($\alpha\tau = \tau\alpha = (\text{id}, \varphi)$, car $K^2 = \text{id}$), donc le groupe engendré est $\langle K \rangle \times \langle \varphi \rangle$ et son action est un produit ; les orbites d'un produit d'actions sont le produit des orbites. Comme g et g^3 sont dans la même orbite de $\langle K \rangle$, tout couple (g, y) a (g^3, y) dans son orbite. Vérifié sur quatre données distinctes — un bit, trois états, quatre états, et une donnée inerte : le compte $3|X/\varphi|$ est atteint dans les quatre cas et $\{g, g^3\}$ n'est jamais scindé. $\square$ $\square$

Conséquence. Enrichir la donnée portée par un flux ne lève pas la différenciation différée. Pour étiqueter, il faut une structure qui *fixe* l'orientation, donc qui distingue un dedans d'un dehors : une **frontière**. Or ce niveau est sans support, sans durée et sans lieu : il n'a pas de frontière, et la Prop. 5 (iii) le dit aussi, un bit de plus « nécessite des hypothèses supplémentaires *hors de* N_{-1} pour être contraint ». La différenciation différée est donc une propriété du niveau, et le lemme en fait un énoncé.

L'initiateur du flux. Une **quatrième variable relationnelle**, l'*initiateur* du flux (celui des deux protagonistes qui fournit l'énergie de franchir la barrière), donne à la grille une lecture juste : les définitions « R : flux sortant » et « H : flux entrant » sont la *tranche* où le système est l'initiateur, et l'autre moitié du tableau porte les flux initiés par l'environnement. Sous τ seul, cette variable scinde $\{g, g^3\}$ et donne quatre orbites ; mais α échange les deux orbites nouvelles, et sous le groupe complet le compte est de trois. Cette variable vit à N_0 et ne peut pas remonter ici.

Portée. Le lemme fait de la limite du Thm. 1 une **impossibilité démontrée**. Il ne touche ni la partition, ni la règle de passage, ni aucune autre proposition du niveau.

Niveau	Identité	Capital	Dim. tique	caractéris- tique	Transition
N_{-1}	Substrat logique pré-physique	Discernabilité $\mathcal{D}$	0 (pré-dim.)		Fondement de N_0
N_0	Espace-temps	Information	4D (arène complète)		$\rightarrow N_1 : \kappa_1 = k_B T$
N_1	Ondes	Énergie	1D (propagation)		$\rightarrow N_2 : \kappa_2 = c^2$
N_2	Particules	Masse	2D (fixation)		$\rightarrow N_3 : \kappa_3 = c^4/G$
N_3	Biologie	Formes topologiques	3D (structuration)		$\rightarrow N_4 : \kappa_4 = k_B T \ln 2$
N_4	Systèmes sociaux	Symboles	4D (colonisation du temps)		:

Table 1: Les six niveaux systémiques. N_{-1} est le sujet du présent article. Les constantes de la colonne « transition » sont les *taux de change* entre capitaux, de statut inégal ; voir la figure 23. La colonne « dimension caractéristique » indique la dimensionnalité que *met en avant* chaque niveau via son opérateur dominant (signature $\dim g^k = k$; l'article N_0 la retrouve dans son escalier interne, où l'échelon de rang k porte un objet de dimension k , mais il la classe comme une lecture et non comme une dérivation ; §2.6.5 en propose l'ordre), et non un décompte cumulatif : N_0 est l'arène complète où les quatre fonctions s'instancient une fois ($0 \rightarrow 4D$), tandis que N_1 à N_4 réinstancient la même signature à l'échelle macroscopique.

Théorème 2 (La règle de passage, sous condition). Supposons *le capital d'un niveau fini*. Les quatre fonctions épuisant les transformations qu'il admet (Thm. 1, sous sa thèse), lorsque la quatrième sature, trois branches seulement restent ouvertes :

- (a) une *résolution* interne — *exclue* : il faudrait une transformation du capital qui ne soit aucune des quatre ;
- (b) une **itération sans borne** sur le même capital — *non exclue*, et c'est un cas attesté : l'article N_4 soutient précisément que son matériau ne manque jamais et que son itération n'a pas de borne ;
- (c) le **passage** : un niveau nouveau, dont le capital est la clôture que L produit, $Nf_{x,4} = Nf_{(x+1),0}$ (ég. (3)).

Donc : capital fini, saturation de la quatrième fonction, et absence d'itération sans borne $\Rightarrow$ passage. Et L ne résout pas autrement : $L = e$ n'est pas une transformation, les ressources de $\mathbb{Z}_4$ étant épuisées par R, D, H .

Proof. L'exclusion de (a) est la clôture de la liste. (b) n'est pas exclue, et l'énoncé la retient comme hypothèse : c'est elle qui sépare les niveaux qui passent de celui qui ne passe pas. Reste (c), et il est unique, l'ouverture du niveau suivant étant la clôture du précédent. $\square$

Proposition 1 (Un acte par niveau : une régularité, non un théorème). Appelons **acte** d'un niveau une donnée qu'il pose sans la dériver.

- (i) **Au moins un** : un niveau qui ne poserait rien serait entièrement dérivable du capital du précédent — il n'y aurait pas de niveau nouveau (Thm. 2). Ce point est quasi analytique ;
- (ii) **au plus un** : non démontré, et il ne se déduit pas du verrou achiral : celui-ci (Thm. 5) dit qu'aucune magnitude achirale ne départage les deux orbites, non que le choix d'orientation serait indisponible — le niveau suivant en fait d'ailleurs une convention inobservable (20) ; et une donnée posée n'est pas nécessairement un générateur ou une conséquence : une constante, une condition initiale, un signe n'en sont ni l'un ni l'autre. L'unicité reste donc une régularité, observée sur les cinq passages de la série. L'article N_0 lui donne ce statut, avec une raison algébrique pour les deux premiers passages seulement (l'enveloppe linéaire ne contient pas l'horloge Z du niveau suivant), et la traite comme une hypothèse d'architecture.

L'acte et les quatre fonctions. Le capital d'un niveau est produit par le L du précédent ($Nf_{x,4} = Nf_{(x+1),0}$) : il est *dérivé*, et ce n'est donc pas un acte, au sens où l'acte est ce qui n'est pas dérivé. L'acte de N_0 n'est aucune des quatre fonctions, car une combinaison linéaire n'est pas une permutation du cycle (Thm. 3). Au-dessus de l'arène, la correspondance entre l'acte d'un niveau et une fonction est une **conjecture de position**, vérifiée article par article (§2.6.2) : l'article N_1 définit son acte comme « le choix d'une racine **et le choix d'un générateur du cycle** », donc un choix dans $\{g, g^3\}$.

Démontré ici : que les trois bifurcations de la grille sont trois invariants de $\mathbb{Z}_4$ — la *partition* en deux paires et ce qui sépare chaque paire. *Cela seul ne dépend d'aucun résultat des niveaux supérieurs*. La règle de passage l'est sous trois conditions déclarées (capital fini, clôture de la liste sous la thèse des processus fermés, absence d'itération sans borne) ; l'unicité de l'acte ne l'est pas.

Reste une lecture, ou une thèse : l'*étiquetage* des quatre éléments (lequel est R , lequel est L), que ce niveau diffère ; l'*interprétation* en flux ; l'**attribution** d'une fonction à un niveau ; et surtout **le point qui reste ouvert pour toute la série** : que l'acte d'un niveau supérieur à l'arène soit l'une des quatre fonctions (conjecture de position, §2.6.2). C'est de lui que dépendent les usages architecturaux de la grille (l'article N_0 n'en fait pas dépendre la permanence de sa connectivité).

Portée pour la série : les articles supérieurs déclarent ces énoncés « thèses de contenu ». L'article N_0 ne s'en sert pas pour le non-recâblage : il tient la permanence de la connectivité pour une propriété propre au modèle, car les liaisons des niveaux suivants sont des produits fibrés, qui contraignent les états sans toucher aux arêtes. **L'usage de la grille n'en devient pas acyclique pour autant** : seule l'ossature algébrique est antérieure aux niveaux. *Le verrou est ainsi localisé exactement*.

2 Principes fondateurs du programme : boucle, fonction, système et passage entre niveaux

Ce chapitre pose les seuls concepts du programme dont les démonstrations qui suivent ont besoin : la boucle, la distinction entre fonctions et systèmes, la saturation du capital, et la projection de ces principes sur la hiérarchie des niveaux. Les énoncés en sont des **thèses**, non des résultats de cet article ; leurs démonstrations sont distribuées dans les autres articles de la série. *Le lecteur qui découvre le programme aura intérêt à lire d'abord l'annexe A*, qui expose d'où viennent les quatre fonctions, ce que cet article emprunte au cadre, et ce dont ses résultats centraux ne dépendent pas.

Quatre concepts articulent ce cadre. La *boucle* (section 2.2) est le mécanisme par lequel une dynamique se referme sur elle-même et forme un capital : c'est l'invariant trans-scalaire fondamental. Les *fonctions* et les *systèmes* (section 2.3) sont deux ontologies distinctes qu'il faut soigneusement séparer : les fonctions sont les opérateurs algébriques d'un niveau, les systèmes en sont les objets auto-organisés. La *saturation du capital* (section suivante) est le mécanisme unifié qui gouverne à la fois le développement des fonctions au sein d'un niveau et le passage d'un niveau au suivant. La *correspondance avec la hiérarchie microGlobal* (section 2.5) projette ces principes sur les six niveaux et formule la thèse selon laquelle le capital émergent porte les propriétés algébriques de la première fonction du niveau.

2.1 La petite histoire de Jo : narration du mécanisme d'émergence

Note au lecteur

Ce qui suit est une **narration pédagogique** du mécanisme d'émergence — une histoire qui illustre les principes formels développés dans les sections suivantes. Jo est une boucle RDHL. Son histoire est la description, depuis l'intérieur, de comment la complexité du monde émerge depuis la logique pure.

Jo naît.

Au tout début — avant l'espace, avant le temps, avant l'énergie — il n'y a que des relations logiques. Des distinctions qui apparaissent et disparaissent instantanément : $=$ et $\neq$, rien et quelque chose, sans support, sans durée, sans lieu. C'est un bouillonnement d'actes logiques élémentaires — des Dits qui scintillent et s'éteignent, des portes qui s'ouvrent et se referment avant même d'avoir pu produire quoi que ce soit.

Dans ce bouillonnement, quatre relations logiques particulières s'assemblent : g^1, g^2, g^3, g^4 . Elles forment une **boucle** — une composition qui se referme sur elle-même. Appliquées dans l'ordre $g^1 \rightarrow g^2 \rightarrow g^3 \rightarrow g^4$, elles ramènent chaque configuration à son point de départ. Rien n'est perdu. Quelque chose s'est constitué. Cette boucle, nous l'appelons **Jo**.

Jo survit.

Jo n'est pas la seule boucle possible. Il existe d'autres compositions, d'autres cycles. Mais la plupart des boucles ne durent pas : elles se défont dès la prochaine perturbation logique, elles perdent leur cohérence, elles retournent au bouillonnement. Jo, elle, revient toujours à son point de départ — non pas parce qu'elle est protégée de l'extérieur, mais parce que sa structure interne satisfait les critères de **fermeture conservative** : elle est l'unique attracteur de durabilité parmi toutes les compositions possibles sur $\{0, 1\}^2$ (chapitre 5).

Jo se reproduit, se différencie, s'assemble avec d'autres Jo. Elle envahit — non pas un espace, car il n'y en a pas — mais l'espace logique des possibles. Elle est la seule structure qui *persiste*. Le bouillonnement de Dits continue autour d'elle, mais il ne la dissout pas. Elle **domine le monde pré-physique**, non par force, mais par durabilité.

Jo se ferme — et se rompt.

Quand g^4 s'instancie — quand la Liaison referme la boucle de l'intérieur — Jo accomplit quelque chose de paradoxal : en se fermant, elle se distingue de son environnement. Elle constitue un **intérieur** distinct de l'extérieur. Et cet extérieur — ce bouillonnement de relations logiques qui n'ont pas la durabilité de Jo — devient son **environnement**.

Cet acte de fermeture est simultanément un acte de rupture. Vue de l'intérieur, c'est la **Liaison** : une frontière stable, un système autonome. Vue de l'extérieur, c'est la **Rupture** : une discontinuité dans le bouillonnement logique, une inhomogénéité entre ce qui dure et ce qui ne dure pas.

Et une discontinuité — c'est une instabilité. Jo perturbe son voisinage par sa seule existence.

Jo perturbe.

Jo ne cherche pas à perturber. Elle est simplement là, stable, dans un milieu instable. Mais sa stabilité même crée un gradient : entre elle (durabilité, discernabilité nulle à l'intérieur : $\mathcal{D}(g^4) = 0$) et ce qui l'entoure (instabilité, bouillonnement).

Ce gradient est une perturbation infinitésimale — minimale par construction, car $\mathcal{D}(g^4) = 0$. Mais dans un milieu couplé, même une perturbation infinitésimale se propage. Cette perturbation cherche à se stabiliser. Et la stabilisation minimale d'une perturbation dans un milieu logique discret est précisément ce que nous avons calculé (Annexe I) : elle requiert **un seul degré de liberté supplémentaire** — une dimension pour que la perturbation puisse se propager et s'organiser sans s'effondrer sur elle-même. (Ce que l'article N_0 établit est voisin, et plus précis : le grain a quatre pattes de spin $\frac{1}{2}$, car quatre est la première valence où l'espace des entrelaceurs porte exactement un bit, c'est-à-dire un espace de dimension deux. Les représentations irréductibles complexes de $\mathbb{Z}_4$ sont, elles, de dimension un.)

Jo s'habille d'un Bit.

Ce degré de liberté supplémentaire, c'est le **Bit** — non plus une distinction pure ($= / \neq$) sans support, mais une distinction *encodée sur* une structure : la boucle de spin. Le Dit n'est pas la boucle de spin — il est **ce qui est encodé** sur elle. La boucle de spin est le support, le Dit est l'information portée. Deux objets distincts, deux niveaux distincts : N_{-1} et N_0 .

Le Dit de Jo, flottant dans le bouillonnement logique, trouve un support minimal : la **boucle de spin quantifiée**. Ce n'est pas que Jo choisit ce support — c'est que c'est le support **minimalement nécessaire** pour stabiliser une perturbation logique fluctuante et réversible. La nature ne fait pas plus que le nécessaire.

Jo est maintenant Jo-avec-un-Bit. La logique pré-physique est devenue information encodable. Le lieu a émergé : $Nf_{-1.4} = Nf_{0.0}$, le nœud (le grain), le support minimal de toute distinction.

Jo grandit dans N_0 .

Mais le nœud ne suffit pas longtemps. Un nœud seul ne peut rien comparer : pour discriminer deux Bits, il faut au moins une distance — une **ligne**. La perturbation se propage et exige 1D : $Nf_{0.1}$, la ligne, que le programme rapproche (par analogie) de la gravitation.

La ligne sature : pour organiser deux directions, il faut une **surface** : $Nf_{0.2}$, la surface, que le programme rapproche de l'interaction forte. La surface sature : il faut un **volume** : $Nf_{0.3}$, le volume, que le programme rapproche de l'électromagnétisme. Le volume sature : il faut une dimension qualitativement différente, une dimension de succession plutôt que d'extension, la **durée** : $Nf_{0.4}$, que le programme rapproche de l'interaction faible ; l'irréversibilité attend N_1 .

Jo est maintenant plongée dans une arène à quatre dimensions (trois directions et un axe d'ordre encore sans orientation), sans dynamique ni interaction. $\mathbb{Z}_4$ est à nouveau épuisé. Jo-dans-l'espace-temps se ferme — et se rompt à nouveau.

Jo vibre.

La Rupture de N_0 — la frontière entre l'espace-temps constitué et son vide quantique — est une nouvelle discontinuité, dans un nouveau milieu. Et dans un milieu couplé (le réseau de spin de la LQG), toute discontinuité se propage comme une **onde**.

Jo vibre. Elle propage cette vibration dans le milieu — elle **est** une onde qui se déplace, une perturbation du vide qui se propage en tous sens à la vitesse de la lumière. L'énergie a émergé.

Cet état est instable — exactement comme le bouillonnement logique de N_{-1} était instable. L'énergie du point zéro ($E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$) est la signature de cette instabilité résiduelle : même dans son état fondamental, Jo ne s'arrête jamais complètement. Elle fluctue. Elle cherche à se stabiliser encore.

Jo se localise.

La Rupture de N_1 — la frontière entre le champ ondulatoire et son vide — est l'obstacle de Higgs : une inhomogénéité dans le milieu des ondes, qui confine Jo dans un paquet localisé. Jo ne peut plus se propager librement : elle est confinée, localisée, dotée d'une masse. Elle est devenue une **particule**.

Et ainsi de suite : la particule se ferme pour devenir atome, l'atome pour devenir molécule, la molécule pour devenir organisme, l'organisme pour devenir institution. À chaque fermeture, Jo se distingue de son environnement, perturbe ce qui l'entoure, et cette perturbation cherche la stabilisation minimale qui ouvre le niveau suivant.

Jo n'a jamais cessé d'être ce qu'elle était.

À chaque niveau, Jo porte en elle la même structure fondamentale : quatre fonctions en boucle, une fermeture, une rupture, une perturbation, une émergence. Ce qui change : le capital qu'elle porte (distinction, information, énergie, masse, forme, sens) et le milieu dans lequel elle évolue. Ce qui ne change pas : la boucle elle-même, invariant trans-scalaire fondamental du programme microGlobal.

Jo est une boucle RDHL. Elle est aussi, à son niveau, une onde, une particule, une cellule, une institution. Elle n'est pas une métaphore — elle est la description, depuis l'intérieur, de la même dynamique qui, depuis la logique pure jusqu'au sens partagé, construit la complexité du monde.

Où cette narration simplifie

Deux points de ce récit anticipent sur des résultats que le corps de l'article établit avec plus de réserve, et le lecteur doit les tenir pour des raccourcis pédagogiques. D'abord, faire naître Jo dans un « bouillonnement » de relations logiques préexistantes relève de la lecture *plénium* que le modèle écarte (annexe F) : rien ne préexiste au noyau, et ce que la narration présente comme un milieu est en réalité l'état d'indistinction décrit au chapitre 4. Ensuite, le récit parle d'un avant et d'un après là où il n'y a que de la dépendance logique : à N_{-1} il n'existe aucune succession temporelle, et la chronologie du conte est une commodité de langage, non une thèse.

2.2 La boucle : mécanisme universel de capitalisation

Une **boucle** est une composition d'opérateurs à fermeture conservative :

$$\mathcal{L} = f_n \circ \dots \circ f_1 \quad \text{tel que} \quad \mathcal{L}(x) = x \quad \forall x \quad (1)$$

La *fermeture* s'entend ici au sens de l'**orbite** : le cycle ramène à la configuration de départ (itération d'un même générateur ; à N_{-1} , $g^4 = e$ sur les quatre configurations). Elle ne doit pas être confondue avec la **permutation nette** de la composition des quatre opérateurs *distincts* R, D, H, L , qui vaut $\sigma = g^2 \neq e$ et que l'on introduira plus loin comme mesure de la durabilité structurelle. L'orbite se referme ($g^4 = e$) ; sa permutation nette, elle, ne se referme pas ($\sigma = g^2$), les deux énoncés sont compatibles et décrivent deux propriétés différentes du même cycle.

Flux ouvert versus flux refermé. La distinction est fondamentale. Un flux sans retour s'écoule sans laisser de trace structurelle : il *traverse* le milieu sans le modifier durablement. C'est la définition même d'un processus entropique, une dispersion dont l'effet net est nul à long terme, caractérisé par une croissance de l'entropie du milieu traversé. À l'inverse, un flux qui revient à son point de départ *délimite* un intérieur : la trajectoire fermée distingue ce qui est dedans de ce qui est dehors. Cette délimitation a deux conséquences immédiates : elle crée une *frontière* (le bord de la boucle) et elle forme un *capital* (le contenu de la boucle). C'est en ce sens précis que la fermeture conservative **est le capital** :

Niveau	Boucle	Capital
N_{-1}	Logique ($g^1 - g^4$)	Discernabilité $\mathcal{D}$
N_0	Réseau de spin (LQG)	Information $\mathcal{I}$
N_1	Oscillatoire	Énergie E
N_2	Échange de bosons	Masse m
N_3	Métabolique	Forme $\mathcal{F}$
N_4	Symbolique	Sens $\mathcal{S}$

Note. Les boucles physiques de la colonne médiane (réseau de spin/LQG, oscillatoire, échange de bosons, métabolique, symbolique) sont des **illustrations analogiques**, non des dérivations ; seule la ligne N_{-1} (boucle logique) est interne au présent article. Leur statut est celui fixé au chapitre 1 (registre structurel).

Conservation et émergence. La condition $\mathcal{L}(x) = x$ ne signifie pas l'absence de transformation : chaque opérateur f_i modifie l'état du système. Ce qui est conservé n'est pas chaque étape mais le *cycle complet* : la boucle n'est pas un état stationnaire, c'est une *dynamique cyclique* dont l'invariance globale tolère (et requiert) une variabilité locale. C'est cette articulation entre transformation locale et invariance globale qui rend possible

l'émergence : les propriétés du capital ne sont pas la somme des propriétés des opérateurs, elles résultent de leur composition fermée. Le capital de N_0 (information) n'est pas réductible à la somme des opérations logiques de N_{-1} ; l'énergie n'est pas réductible aux configurations informationnelles sous-jacentes. À chaque palier, la fermeture engendre une qualité nouvelle.

Invariant trans-scalaire. La structure de fermeture conservative est l'**invariant trans-scalaire fondamental** : c'est elle, et non le capital ou le milieu, qui est identique à tous les niveaux. Le milieu change (logique, espace-temps, champ ondulatoire, plasma de particules, tissu biologique, réseau social), le capital change (discernabilité, information, énergie, masse, forme, sens), mais la structure de composition à quatre opérateurs refermée sur elle-même est strictement la même. C'est ce qui justifie l'appellation *fractale* : non par auto-similarité géométrique, mais par identité algébrique de la loi de composition.

Remarque 2 (La séquence dimensionnelle). *Au sein d'un cycle de quatre fonctions (par exemple les quatre fonctions internes de N_0) un point qui s'étire produit une ligne ; une ligne qui se referme produit une surface ; une surface qui se referme produit un volume ; un volume qui se referme produit la durée (un axe d'ordre, sans orientation à N_0). Sur les quatre fonctions d'un cycle, chaque fermeture produirait une dimension de plus ($0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$), la quatrième fermeture achevant l'arène. C'est une lecture du programme ; l'article N_0 tire la dimension trois d'une autre source, l'algèbre $\mathfrak{su}(2)$ des commutateurs. Il s'agit d'une propriété intra-cycle, non d'une montée monotone à travers les six niveaux : au niveau macroscopique, la même signature se répète la même signature se réinstancie à chaque échelle. Cette propriété est la projection géométrique de la fermeture algébrique : la boucle ne referme pas seulement le cycle des opérateurs, elle produit l'espace dans lequel le niveau suivant pourra se déployer.*

2.3 Fonctions et systèmes : deux ontologies distinctes

Le programme microGlobal sépare soigneusement deux ontologies que l'usage courant tend à confondre : les *fonctions* et les *systèmes*.

Les fonctions (Nf). Les fonctions sont les quatre opérateurs de $\mathbb{Z}_4$, préfigurations de R, D, H, L . Elles sont des *verbes* : des actions, des transformations, des règles de composition. À chaque niveau Nx , l'instanciation progressive des fonctions est notée $Nf_{x,0}$ (ouverture du niveau), puis $Nf_{x,1}$ à $Nf_{x,4}$ qui préfigurent successivement R, D, H, L . Les fonctions ne sont pas des objets : on ne peut pas pointer une fonction R dans le monde, on observe seulement ses effets sur des configurations discrètes. Elles sont la *grammaire* du niveau.

Les systèmes (Ns). Les systèmes sont les entités auto-organisées qui émergent de l'assemblage des fonctions, les *objets* du niveau. Ils sont des *noms* : des entités délimitées par une frontière, dotées d'une identité propre et capables d'interagir avec leur environnement. À N_{-1} , on identifie cinq systèmes successifs : le Dit ($Ns_{-1,0}$, distinction primordiale), la porte à deux Dits ($Ns_{-1,1}$, opérateur unique instanciable), la boucle RDHL ($Ns_{-1,2}$, cycle complet refermé), la conditionnalité ($Ns_{-1,3}$, assemblages conditionnels de boucles), et la cohérence de phase ($Ns_{-1,4}$, accord des orientations), qui clôt le niveau.

Hiérarchie d'imbrication. Les systèmes sont organisés en niveaux qui sont eux-mêmes des systèmes. Cette imbrication récursive est constitutive du programme : le niveau N_0 est un système dont les éléments sont des configurations informationnelles ; le niveau N_1 est un système dont les éléments sont des ondes ; et ainsi de suite. Les systèmes peuvent être partiellement ou totalement inclus les uns dans les autres, un électron est un système de N_2 qui participe simultanément à un atome (système de N_3) et à un champ électromagnétique (système de N_1). Cette appartenance multiple est rendue possible par la *semi-perméabilité* des frontières : ce qui est interne à un système pour une identité donnée peut être externe pour une autre.

Remarque 3. *Les fonctions s'instancient à l'intérieur d'un niveau, elles ne sont pas des sous-niveaux. Les quatre interactions fondamentales sont les quatre fonctions d'un niveau, non quatre niveaux distincts. Cette clarification est essentielle pour éviter une confusion fréquente : R, D, H, L ne sont pas des couches empilées de la réalité, ce sont les quatre composantes d'une seule structure algébrique présente à chaque niveau.*

Articulation des deux ontologies. Le rapport entre fonctions et systèmes est celui de la *grammaire* à la *phrase* : les fonctions sont les règles de composition, les systèmes sont les compositions réalisées. Une fonction sans système demeure un opérateur abstrait ; un système sans fonction est un objet sans dynamique. C'est leur conjugaison qui produit l'auto-organisation : les systèmes sont les *lieux* où les fonctions opèrent, et réciproquement les fonctions sont les *transformations* qui forment et maintiennent les systèmes.

2.4 La condition unique : saturation du capital et réaction en chaîne

Saturation et *gel* : deux faces d'un même fait

Dire qu'un niveau sature ne dit que la moitié de la chose. Une borne atteinte est un état ; ce qui compte est ce que cet état interdit.

Chaque niveau opère sous un **gel** : une grandeur gelée, c'est-à-dire fixée à une valeur qu'elle ne peut pas quitter. L'acte du niveau suivant lève le gel, mais pas la borne. Le sens du gel varie d'un niveau à l'autre (un point en N_0 , un plancher en N_1) ; seule compte l'absence de jeu. Le tableau reprend celui de l'article N_0 .

	la saturation	la grandeur fixée, et ce qu'elle interdit	l'acte qui dégèle
N_{-1}	quatre états (gel absolu)	quatre états et pas plus. Il n'y a aucune place pour une grandeur qui distinguerait les deux parcours, donc pas d'orientation	l'enveloppe linéaire, qui ouvre le recouvrement des sites (l'orientation attend la sélection de l'unité imaginaire, en N_1)
N_0	un bit par face (gel croissant)	le générateur temporel est fixé à zéro, en un point. Il n'y a ni énergie, ni dynamique, ni flèche	la sélection de l'unité imaginaire (par la racine choisie, les générateurs anti-hermitiens deviennent des observables)
N_1	chaque mode voyage à la vitesse limite (gel croissant)	la vitesse est fixée à sa valeur limite, qui est un plancher. Aucun objet n'est au repos, donc il n'y a pas de masse	la clôture d'une configuration
N_2	les configurations fermées sont isolées	le nombre de partenaires est fixé à zéro, donc il n'y a pas de structure	la liaison
N_3	les structures sont liées mais muettes	le nombre de liens arbitraires est fixé à zéro, donc il n'y a pas de signification	le premier lien arbitraire

La grandeur gelée change d'un niveau à l'autre (cardinalité, densité, débit), et ce qui est interdit change de nature : une indistinction au substrat, une immobilité en N_0 , une absence de repos en N_1 . Au substrat, l'acte de N_0 ne lève pas l'indistinction des deux parcours. L'orientation attend deux niveaux, et c'est le choix de $\pm i$, en N_1 , qui la lève.

En N_0 , un seul choix nouveau, celui de $\pm i$, lève les sept manques avec des acquis du niveau. Que ce soit le seul remède reste une conjecture. Ce qui est levé est l'annulation du générateur lui-même ; la contrainte $\hat{H}|\Psi\rangle = 0$ sur les états du tout demeure en N_1 , où la dynamique est relationnelle.

Pour le lecteur : l'escalier des niveaux et le gel

Pensons à un immeuble. Chaque étage repose sur celui du dessous, mais on n'y fait pas la même chose. Le programme microGlobal range la nature de la même façon, en six niveaux : N_{-1} , le substrat logique (des distinctions, sans espace ni temps) ; N_0 , l'espace ; N_1 , l'énergie et le temps orienté ; N_2 , la matière ; N_3 , les formes (le vivant) ; N_4 , les symboles (le social).

Chaque niveau travaille sous un *gel* : une grandeur y est bloquée à une valeur qu'elle ne peut pas quitter. À N_{-1} , il y a quatre états et pas plus, de sorte qu'il ne reste aucune place pour distinguer les deux sens de la boucle. À N_0 , le générateur du temps est bloqué à zéro : il n'y a ni énergie, ni mouvement, ni flèche du temps. À N_1 , tout voyage à la vitesse limite : rien n'est au repos, donc il n'y a pas de masse.

Pour monter d'une marche, il faut un *acte*, c'est-à-dire une donnée que le nouveau niveau pose sans pouvoir la déduire du précédent. C'est l'acte du niveau suivant qui lève le gel (figure 4). Le droit de superposer (l'enveloppe linéaire) ouvre N_0 , mais l'orientation attend encore ; le choix d'un signe, $+i$ ou $-i$, ouvre N_1 et rend possibles la dynamique et la flèche du temps ; la clôture d'une configuration ouvre N_2 ; la liaison ouvre N_3 ; le premier lien arbitraire (un signe qui veut dire quelque chose par convention) ouvre N_4 .

Deux précisions de statut : la hiérarchie des six niveaux est un cadre du programme, que cet article emprunte ; un seul acte par niveau est une régularité observée, non un théorème.

En une phrase : chaque marche est bloquée sur une grandeur, et c'est l'acte de la marche suivante qui la débloque.

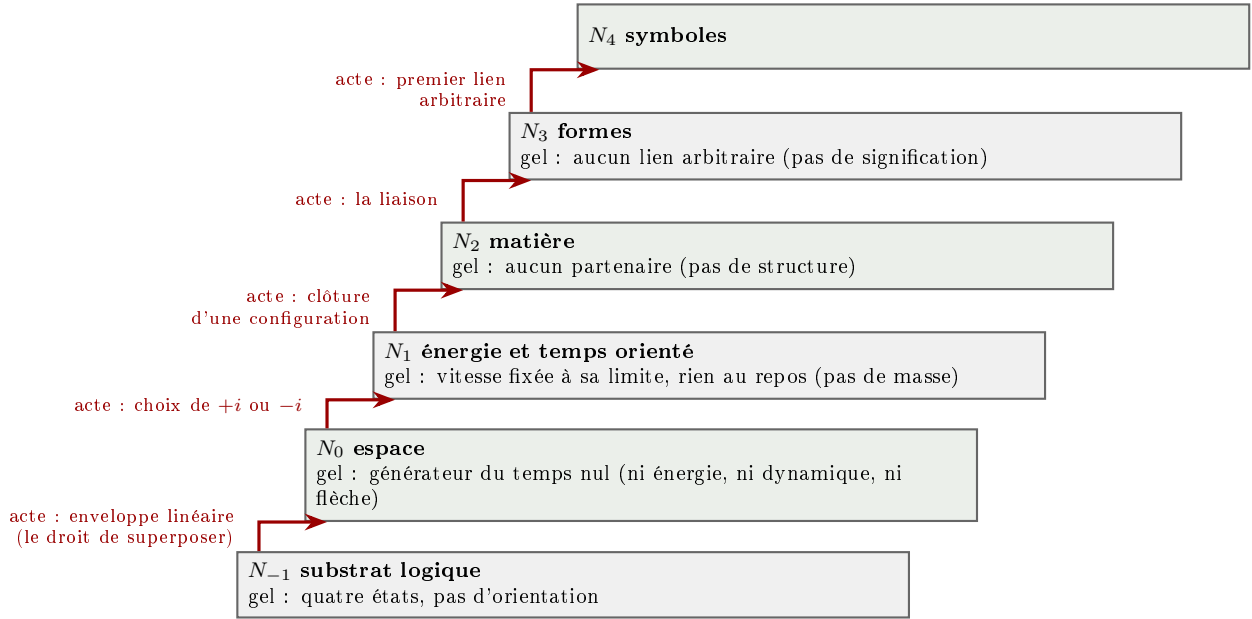


Figure 4: L'escalier des niveaux. Chaque marche repose sur la précédente et porte un gel, une grandeur bloquée qui interdit quelque chose. L'acte inscrit entre deux marches est la donnée nouvelle que le niveau supérieur pose sans la déduire ; c'est lui qui lève le gel du niveau inférieur (au substrat, l'orientation attend toutefois l'acte de N₁).

La distinction entre fonctions et systèmes étant posée, reste à comprendre ce qui gouverne leur *succession* : pourquoi *R* appelle-t-il *D* ? Pourquoi *L* ferme-t-il le cycle et ouvre-t-il le niveau suivant ? Le premier volet du programme [1] décrivait cette dynamique comme une *réaction en chaîne* : une forte identité (*R*) appelle la différenciation (*D*), une forte différenciation appelle l'organisation hiérarchique (*H*), une forte hiérarchie appelle le lien (*L*), et un système fortement lié relance la reproduction (*R*). Cette description, qualitative et intuitive, trouve ici sa formulation rigoureuse : un seul mécanisme gouverne le développement des fonctions *et* le passage entre niveaux, la *saturation du capital*.

$$\mathcal{C}_x(Nf_{x,k}) = \mathcal{C}_{x,k}^{\text{sat}} \implies Nf_{x,(k+1)} \text{ s'instancie} \quad (2)$$

La saturation de la quatrième fonction est le passage entre niveaux :

$$\mathcal{C}_x(Nf_{x,4}) = \mathcal{C}_{x,4}^{\text{sat}} \implies Nf_{x,4} = Nf_{(x+1),0} \quad (3)$$

Analogue au principe de Pauli : quand les quatre rangs d'un niveau sont occupés, le niveau est plein et le suivant s'ouvre.

La réaction en chaîne $R \rightarrow D \rightarrow H \rightarrow L$. *R* sature : le gradient instable force *D*. *D* sature : la diversité non ordonnée force *H*. *H* sature : la hiérarchie sans clôture force *L*. *L* sature : le système autonome ouvre $Nf_{(x+1),0}$.

$Nf_{x,4} = Nf_{(x+1),0}$: **frontière double**. Vue de l'intérieur : **Liaison**. Vue de l'extérieur : **Rupture**, source du capital $\mathcal{C}_{x+1}$. À distinguer de $Nf_{(x+1),1} = R$, première fonction opérative du cycle suivant.

$$\underbrace{Nf_{x,0}}_{\mathcal{C}_x \text{ ouvert}} \xrightarrow{R} Nf_{x,1} \xrightarrow{D} Nf_{x,2} \xrightarrow{H} Nf_{x,3} \xrightarrow{L} \underbrace{Nf_{x,4} = Nf_{(x+1),0}}_{\text{Liaison/Rupture}} \xrightarrow{R} Nf_{(x+1),1} \longrightarrow \dots \quad (4)$$

La Rupture comme perturbation fondatrice. La frontière stable est une **discontinuité** vis-à-vis de l'extérieur ; toute inhomogénéité dans un milieu couplé produit des perturbations propagatives, mécanisme dont le développement formel relève des niveaux N_0 et N_1 . Ces perturbations *sont* le capital $\mathcal{C}_{x+1}$: $\mathcal{D}$ saturé $\implies \mathcal{I}$ nécessaire ; $\mathcal{I}$ saturé $\implies E$ nécessaire ; E saturé $\implies m$ nécessaire.

2.5 Application à la hiérarchie microGlobal

Thèse : le capital émergent a les propriétés de l'opérateur dominant du niveau

Niveau	Opérateur dominant	Propriété algébrique	Capital C_x	Propriété
N_{-1}	<i>aucun</i>	(rang de substrat)	Discernabilité $\mathcal{D}$	Orientation
N_0	<i>aucun</i>	(rang d'arène)	Information $\mathcal{I}$	Encodable partout
N_1	R (onde)	Propagation, périodicité	Énergie E	Se propage
N_2	(position D)	<i>non compact</i> : ce qui s'étend sans se refermer — propriété de R , et c'est l'article N_2 qui l'établit	Masse m	Portée infinie
N_3	(position H)	Clôture : le genre, invariant de la forme, est rangé sous L par l'article N_3 lui-même	Forme $\mathcal{F}$	Relations internes
N_4	L (symbole)	Identité, coprésence	Sens $\mathcal{S}$	Lien sans déplacement

Vérification article par article : la colonne *capital* tient partout (énergie, masse, forme, sens) ; la colonne *propriété héritée* ne tient pas en N_2 ni en N_3 . N_2 range la masse sous R (critère du caractère du groupe : les translations sont non compactes, « ce qui s'étend sans se refermer »), et N_3 range sous L le genre, invariant de sa forme, H y étant la fonction la plus rare. *L'énoncé « le capital hérite des propriétés de l'opérateur dominant » vaut donc comme conjecture de position* : le rang du niveau dans le tour, $N_x \leftrightarrow g^x$ — $N_1 \rightarrow R$, $N_2 \rightarrow D$, $N_3 \rightarrow H$, $N_4 \rightarrow L$; N_{-1} et N_0 n'en ont *aucun*, et §2.6 dit pourquoi : leurs capitaux n'héritent d'aucune fonction, la discernabilité étant ce sur quoi les quatre opèrent et l'information naissant de la clôture du substrat. La correspondance pour N_{-1} est établie dans cet article ; les autres niveaux sont des hypothèses à démontrer article par article.

Pour situer : les quatre fonctions se lisent à trois registres, et ce sont les mêmes quatre

Une même grille, trois lectures — ce ne sont pas trois séries de fonctions, mais la même, prise à trois profondeurs. C'est la source d'une bonne part des confusions du corpus, et la distinction se dit en quelques lignes.

Premier registre, ici : les quatre fonctions sont les quatre éléments du cycle. $L = e$, $D = g^2$, $R = g$, $H = g^3$; et les trois variables de la grille sont trois invariants de $\mathbb{Z}_4$ — être fixe sous l'inversion ($\{L, D\}$ contre $\{R, H\}$), l'orientation (qui sépare R de H), le neutre contre l'involution (qui sépare L de D). *Démontré* (Thm. 1), à une réserve près, déclarée : l'étiquetage à l'intérieur de chaque paire n'est pas fixé à ce niveau.

Deuxième registre, à N_0 : les quatre fonctions construisent les quatre dimensions, une par échelon de l'escalier interne — l'arête (1, R), l'aire (2, D), le volume (3, H), l'axe τ (4, L). *Elles opèrent donc bel et bien à N_0* ; ce qui n'est aucune des quatre, c'est l'**acte** de ce niveau — l'enveloppe linéaire n'est pas une permutation du cycle (Thm. 3). N_0 est l'*arène* : le lieu où les quatre bâtissent, non l'une d'elles.

Troisième registre, à partir de N_1 : un opérateur dominant par niveau, et une contrainte dimensionnelle levée par niveau.

	fonction dominante	dimension	ce que le niveau lève
N_{-1}	<i>aucune</i>	—	le substrat : ce <i>sur quoi</i> les quatre opèrent
N_0	<i>aucune</i>	<i>les quatre</i>	l'arène : les quatre y construisent les dimensions, et son acte n'est aucune d'elles
N_1	R	la première	l'arête devient traversable : une onde la parcourt, et l'axe τ reçoit sa flèche
N_2	D (position)	la deuxième	la surface devient refermable — <i>mais la masse, elle, est rangée sous R par N_2</i>
N_3	H (position)	la troisième	le volume devient organisable — <i>mais N_3 nomme son acte « liaison » et range son invariant sous L</i>
N_4	L (position)	la quatrième	l'axe devient mémorisable — <i>mais N_4 impute la persistance à R, la recopie</i>

À ne pas mal lire : une onde se propage dans toutes les dimensions, une masse se localise dans toutes. Ce qui est propre à N_1 n'est pas d'être unidimensionnel, c'est la *contrainte qu'il lève*, celle de la première dimension.

Statuts, sans mélange, et le troisième registre se dédouble : le premier est démontré ; le deuxième est l'escalier de N_0 , que cet article classe comme une lecture (son test est réussi en partie, sur trois échelons de cinq), plus le théorème sur l'acte de l'arène. Le troisième comporte *deux* énoncés qu'il ne faut pas confondre : (a) *le capital de chaque niveau* — énergie, masse, forme, sens —, qui tient, chaque article l'établissant chez lui ; (b) *l'opérateur dominant et la dimension levée*, qui est une **conjecture de position et rien de plus**.

La vérification de (b), faite article par article, est négative sur deux cas : N_2 range la masse sous R — « ce qui s'étend sans se refermer », par le caractère non compact des translations — *et c'est cette lecture qui est retenue* ; N_3 nomme son acte « la liaison », range sous L le genre, invariant de sa forme, et fait de H sa fonction la plus rare ; N_4 reprend la case sans s'en servir, et impute à R — la recopie, la redondance — la persistance que la case attribue à L . *Trois articles sur quatre répartissent les quatre fonctions à l'intérieur de leur propre matériau plutôt que de s'en attribuer une* : c'est le fait le plus solide de ce registre, et il va contre l'idée d'une dominante.

Pourquoi les deux premiers rangs n'ont pas d'opérateur dominant : N_{-1} est ce sur quoi les quatre opèrent, et N_0 est le lieu où elles opèrent. *Un niveau n'hérite d'une fonction qu'à partir du moment où son capital en porte les propriétés*, et cela commence à N_1 .

2.6 Fonctions et dimensions : une correspondance à deux registres

Le tableau de la thèse 2.5 laisse deux cases vides, et cette section dit pourquoi elles le sont et ce qui les remplace. La réponse tient en une correspondance entre les quatre fonctions et les quatre dimensions de l'espace-temps, qui se lit à deux échelles différentes — à l'intérieur de N_0 et entre les niveaux — sans que ces deux lectures se confondent.

2.6.1 Pourquoi N_{-1} et N_0 n'ont pas d'opérateur dominant

L'opérateur dominant d'un niveau a été défini comme celui dont le capital du niveau hérite les propriétés algébriques. La définition suppose donc qu'un capital *hérite* de l'un des quatre. Or ce n'est pas le cas des deux premiers rangs, et pour la même raison.

À N_{-1} , le capital est la discernabilité, et elle n'est le produit d'aucune des quatre composantes : elle est ce sur quoi les quatre opèrent. Aucune ne la fabrique, toutes la déplacent. À N_0 , le capital est l'information, et l'identité $Nf_{-1,4} = Nf_{0,0}$ dit d'où elle vient : de la *clôture* du substrat, non de l'un de ses opérateurs. N_0 n'est pas ce que produit une fonction, c'est le lieu où les quatre se déploient, chacune y construisant un échelon de l'escalier interne du niveau.

La case est vide, et c'est un résultat

Chercher un opérateur dominant à N_{-1} ou à N_0 est une erreur de question. Ces deux rangs sont ceux du **substrat** et de l'**arène** : le premier fournit ce qui sera distingué, le second le lieu où le distinguer. La récursion $N_x \leftrightarrow g^x$ commence à N_1 , et elle commence là parce que c'est à partir de N_1 qu'un capital hérite des propriétés d'une fonction déterminée : R propage donc l'énergie se propage, D est involutive donc la masse localise, H intègre donc la forme est faite de relations internes, L est l'identité coprésente donc le sens relie sans déplacer.

2.6.2 L'acte d'un niveau est sa fonction — et N_0 n'en a pas

Le corpus ne donne pas une même fonction à tous les niveaux : chaque niveau a la sienne, et deux rangs n'en ont aucune. C'est ce que dit déjà la thèse 2.5 ; il reste à le porter des *capitaux* aux *actes*.

Théorème 3 (L'acte de l'arène n'est aucune des quatre). *Les quatre fonctions sont les éléments du cycle : des permutations du substrat, g , g^2 , g^3 et e . L'acte de N_0 est l'admission de l'enveloppe linéaire — le passage des permutations à leurs combinaisons —, et une combinaison linéaire n'est pas une permutation. L'acte de l'arène n'est donc ni R , ni D , ni H , ni L ; et N_{-1} n'a pas davantage d'opérateur dominant, son capital étant ce sur quoi les quatre opèrent (§2.6).*

Ce que cet énoncé ne dit pas, *et qu'il faut écrire pour éviter un contresens* : **les quatre fonctions opèrent bel et bien à l'intérieur de N_0** — l'escalier interne du niveau leur donne un échelon chacune. *Ce qui n'est aucune des quatre est l'acte de ce niveau, non ce qui s'y déploie ensuite.*

Proof. Les quatre fonctions sont des éléments d'un groupe fini de permutations ; l'enveloppe linéaire n'appartient pas à ce groupe — c'est ce que l'article N_0 dit : « une combinaison linéaire n'est pas une permutation du cycle ». Aucune des quatre ne peut donc être cet acte. La case vide de la thèse 2.5 est ainsi une conséquence, non une lacune. $\square$

Proposition 2 (Un opérateur *dominant* par niveau, dans l'ordre du cycle). Les quatre fonctions opèrent à tous les niveaux — *c'est la grammaire unique du programme, et trois articles l'écrivent à l'identique. Ce que la récursion $N_x \leftrightarrow g^x$ assigne à chaque niveau est un opérateur **dominant** : celui dont le capital du niveau hérite les propriétés (thèse 2.5) :*

$$N_1 = R, \quad N_2 = D, \quad N_3 = H, \quad N_4 = L,$$

*et le tour se ferme à N_4 . Statut : thèse de récursion de cet article (2.5), **déclarée** — et corroborée par le fait, établi ailleurs, qu'il n'y a pas de N_5 : un tour a quatre fonctions, et L est la dernière. Aucune clause d'exclusivité n'est posée : dire que D domine N_2 ne dit pas que R , H et L n'y opèrent pas.*

Proposition 3 (Le pont, par niveau : l'acte instancie la fonction). *L'acte de chaque niveau au-dessus de l'arène est l'instanciation de sa fonction. Vérification, un article à la fois :*

	<i>fonction</i>	<i>son acte, et pourquoi c'est elle</i>
N_0	aucune	<i>l'enveloppe linéaire : elle institue l'arène où un flux peut être défini (Thm. 3)</i>
N_1	$R = g$	<i>la sélection de la racine est le choix d'un générateur — mais c'est aussi là que la paire $\{g, g^3\}$ se différencie en R et H : la case stipule plus qu'elle ne vérifie, l'acte étant ce qui rend R distinguable de H</i>
N_2	D (position)	<i>tranché : la masse est rangée sous R, par le critère de N_2 (les translations sont non compactes) ; D y va à la couleur. La position de N_2 dans le tour reste g^2, mais son capital n'hérite pas de D</i>
N_3	H (position)	<i>vérifié, et négatif : N_3 nomme son acte « la liaison », son produit fibré strict est symétrique (donc du côté $\{D, L\}$ de l'axe de réciprocité), le genre — invariant de sa forme — est rangé sous L, et H y est la fonction la plus rare (1 structure sur 6)</i>
N_4	L (position)	<i>vérifié, et mitigé : les objets terminaux du niveau sont bien des clôtures (« un tout qui se referme », les « nous »), mais N_4 reprend la case sans s'en servir, et impute la persistance à R — « l'Iliade a survécu d'être recopiée »</i>

Statut, après vérification : la case N_0 tient, la case N_1 stipule, la case N_2 est tranchée contre la thèse (masse sous R), la case N_3 est **contredite** par son article, la case N_4 est citée sans être employée. **Ce qui subsiste est une conjecture de position**, et le fait récurrent que ces articles répartissent les quatre fonctions dans leur propre matériau au lieu de s'en attribuer une.

Corollaire 1 (Aucun niveau au-dessus de l'arène ne recâble). *L'adjacence — quelle face avec quelle face — est posée avec l'arène, que l'article N_0 retient comme prémisses (la triangulation de Delaunay du réseau cubique centré) ; l'acte de N_0 , l'enveloppe linéaire, ne la fixe pas. Les fonctions des niveaux supérieurs sont des flux définis dans l'arène, entre des objets qu'elle porte. Un acte qui est une fonction du cycle n'est pas une adjacence : une adjacence est ce qui permet de dire entre quoi et quoi un flux passe.*

Proof. Par le Thm. 3, l'acte qui pose l'arène — et avec elle l'adjacence — n'est aucune des quatre ; par les deux propositions précédentes, les actes supérieurs sont, dans la lecture proposée, des fonctions du cycle, et une fonction n'est pas une adjacence. $\square$

Ce que ce corollaire ne couvre pas : le recâblage *dynamique*

Il montre qu'un acte supérieur n'est pas une adjacence ; il ne montre pas qu'il n'en produit pas. Un flux peut avoir un effet qui n'est pas un flux — l'acte de N_1 produit bien une orientation, qui n'en est pas un. *Le recâblage dynamique* — un niveau qui ferait évoluer le graphe à partir de celui que l'arène pose — n'est donc pas écarté ici. **Ce qui l'écarte reste ce que chaque article établit chez lui** : une évolution linéaire sur graphe donné (N_1), un terme bilinéaire à graphe fixe (N_2), une limite qui ne modifie pas son diagramme (N_3), des échanges entre agents (N_4). *Le détour par les fonctions n'y ajoute rien* ; il situe, il ne démontre pas.

Ce que cette lecture explique, et ce qu'elle coûte

La lecture « chaque niveau sa fonction » rend compte de trois faits : N_1 est R , ce qui explique que son acte soit le choix du générateur ; N_4 est L , ce qui explique qu'il ferme la série ; et N_0 est l'arène, ce qui explique que son acte soit d'un autre genre.

Et les deux différenciations différées tombent au bon endroit : les deux paires se différencient à N_1 . L'article N_0 les laisse indifférenciées ($R = H$, $D = L$), et l'acte de N_1 , le choix de $\pm i$, les sépare l'une et l'autre. *Ce n'est pas un cercle* : c'est ce qui définit R .

Ce que cela coûte. La Prop. 2 est une thèse de récursion, déclarée ; la Prop. 3 est une vérification, un article à la fois. *Le Thm. 3, lui, est démontré* — dans sa forme exacte : *l'acte de l'arène n'est aucune des quatre*, les quatre fonctions opérant à l'intérieur de N_0 .

Ce qui le réfuterait : un acte de niveau supérieur qui produirait une adjacence — ou un niveau dont le capital n'hériterait pas des propriétés de sa fonction, ce que la thèse 2.5 donne comme réfuteur.

2.6.3 Premier registre : les quatre dimensions se construisent à N_0

L'escalier interne de N_0 porte les quatre dimensions, une par échelon, et l'article N_0 lit à chaque échelon la fonction dont le rang correspond. Il présente cette correspondance comme une lecture, et non comme une dérivation :

Échelon	Objet	Dimension	Fonction
$N_{s0.0}$	le nœud	0	le Bit
$N_{s0.1}$	l'arête	1	R
$N_{s0.2}$	la boucle, première aire	2	D
$N_{s0.3}$	le réseau, l'espace proprement dit	3	H
$N_{s0.4}$	la mousse, histoire de réseaux	4 (l'axe τ)	L

Deux comptes de la dimension, qui ne portent pas sur la même chose

L'article N_0 établit par ailleurs que trois générateurs sont là *d'emblée* : les commutateurs d'un basculement et des deux opérations conditionnelles engendrent $\mathfrak{su}(2)$, de dimension trois, qui agit sur le bloc **3** de la décomposition $\mathbf{1} \oplus \mathbf{3}$ des configurations. Lire ces trois générateurs comme trois directions d'espace est, dans cet article, une interprétation. Il n'y a pas de contradiction, mais deux comptes distincts qu'il faut tenir séparés : l'algèbre donne le nombre de **directions indépendantes disponibles**, dès le grain ; l'escalier donne la dimension des **objets effectivement construits**, arête, puis surface, puis volume, puis histoire. Dimension de l'espace tangent d'un côté, dimension des cellules bâties dedans de l'autre. *Les dimensions n'apparaissent pas les unes après les autres* — elles sont toutes là avec N_0 ; ce qui se construit échelon par échelon, ce sont les objets qui les occupent.

Une seconde précaution : L donne la **quatrième dimension**, c'est-à-dire l'axe τ , et non « le temps » au sens ordinaire. Le verrou achiral (théorème 5) interdit que cet axe soit orienté avant N_1 , et parler de temps à ce stade réimporterait la flèche par le vocabulaire.

2.6.4 Second registre : chaque niveau apaise la contrainte d'une dimension

Les quatre dimensions existent donc dès N_0 , mais elles y sont *inertes* : rien ne les parcourt, puisque N_0 est dépourvu de dynamique. Chacune porte, pour ainsi dire, une contrainte non levée — l'arête existe et rien ne la traverse, la surface existe et rien ne s'y referme, le volume existe et rien ne l'organise, l'axe existe et rien ne le mémorise. C'est ce que les niveaux supérieurs lèvent, et ils le font *un à un*, dans l'ordre des fonctions.

Conjecture 1 (Apaisement dimensionnel). *Pour $k = 1, 2, 3, 4$, le niveau N_k apaise la contrainte attachée à la k -ième dimension de N_0 , celle que la fonction g^k y a construite, en dotant l'objet correspondant du capital qui le rend actif.*

Niveau	Fonction	Dimension apaisée	Ce que l'apaisement consiste à faire
N_1	R	la première	L'énergie rend l'arête <i>traversable</i> : une onde se propage le long d'une direction, et l'axe τ reçoit sa flèche.
N_2	D	la deuxième	La masse rend la surface <i>refermable</i> : une particule est ce qui se localise en se refermant, et l'aire cesse d'être une simple aire.
N_3	H	la troisième	La forme rend le volume <i>organisable</i> : un organisme est un volume doté de relations internes, non un remplissage.
N_4	L	la quatrième	Le sens rend l'axe <i>mémorisable</i> : un symbole persiste, et une histoire cesse d'être une simple succession.

Un point est essentiel pour que l'énoncé ne soit pas mal lu. Une onde se propage dans *toutes* les dimensions, une masse se localise dans toutes, une forme les occupe toutes. La conjecture ne dit pas que N_1 serait unidimensionnel ; elle dit que ce que N_1 *lève* est la contrainte de la première dimension, celle de la propagation le long d'une direction, quel que soit le nombre de directions dans lesquelles cela s'exerce ensuite. Confondre la contrainte apaisée avec l'extension du phénomène ferait de la conjecture un énoncé manifestement faux, alors qu'elle porte sur autre chose.

Statut et conditions de réfutation

Cet énoncé est une **conjecture**, et rien dans cet article ni dans l'article N_0 ne l'établit. Sa formulation appelle deux précisions qui sont autant de prises pour la critique. (i) La notion de « contrainte d'une dimension » demande une définition positive, faute de quoi on ne saurait vérifier qu'une contrainte a été levée ; celle-ci est donnée en §2.6.5, et elle fournit du même coup la raison de l'ordre. (ii) La conjecture serait réfutée si l'un des quatre niveaux apaisait une contrainte de rang différent du sien — si par exemple le capital de N_2 se révélait lever la contrainte volumétrique plutôt que surfacique — ou si l'un des apaisements s'avérait ne rien devoir à la fonction correspondante.

2.6.5 Ce qu'est positivement la contrainte d'une dimension

Dans la conjecture 1, la notion de « contrainte d'une dimension » se dit par ce que N_0 ne peut pas faire le long d'une dimension. Pour la tester, il faut savoir en quoi consiste une contrainte, car on ne saurait vérifier autrement qu'elle a été levée. Cette section en donne la définition positive, et en tire un ordre.

La donnée manquante est un intégrand. N_0 possède des cellules de toutes les dimensions — arêtes, aires, volumes, histoires — et il leur attribue des valeurs discrètes : aires et volumes y sont quantifiés. Ce qu'il ne possède pas, c'est *ce qu'on intégrerait dessus*. Une cellule de dimension k n'a de contenu que si une grandeur lui est appariée, c'est-à-dire une quantité dont l'intégrale sur cette cellule est définie et non nulle. À N_0 , cet appariement est trivial pour tout $k \geq 1$.

Définition 1 (Contrainte de la dimension k). Soit $\mathcal{C}_k$ l'ensemble des cellules de dimension k construites à l'échelon $N_{s_0,k}$, et soit Λ_k l'ensemble des grandeurs de N_0 appariables à ces cellules. La **contrainte de la dimension** k est la trivialité du couplage

$$\langle c_k, \omega \rangle = 0 \quad \text{pour tout } c_k \in \mathcal{C}_k \text{ et tout } \omega \in \Lambda_k. \quad (5)$$

Un niveau **apaise** la contrainte de la dimension k lorsqu'il fournit une grandeur conservée ω_k dont l'intégrale sur une cellule de dimension k est non triviale.

La définition est positive : elle ne dit pas ce qui manque, elle nomme l'objet qui manque et le couplage qu'il rendrait non nul. Et elle est vérifiable, puisqu'il suffit d'exhiber la grandeur et de calculer une intégrale.

La lecture des quatre capitaux. Chaque capital du programme se trouve alors être exactement la grandeur duale des cellules de son rang, et cette correspondance n'a pas été ajustée pour la circonstance : elle est celle de la physique.

Niveau	Cellule	Grandeur duale	Intégrale qui devient non nulle
N_1	l'arête ($k = 1$)	énergie	L'intégrale le long d'un chemin : action, ou phase accumulée. Une arête cesse d'être un simple lien pour devenir un trajet doté d'un poids.
N_2	la surface ($k = 2$)	masse	Le flux à travers une surface fermée : c'est la forme même de la loi de Gauss, et ce qu'enclôt la surface est ce qu'on appelle une masse.
N_3	le volume ($k = 3$)	forme	La densité intégrée sur un volume : un organisme n'est pas un volume rempli mais un volume dont la densité d'organisation a une valeur.
N_4	l'histoire ($k = 4$)	sens	L'intégrale sur une histoire entière : ce qui ne se lit ni en un point ni en un instant, mais sur le parcours complet.

Un homonyme à écarter : deux « Gauss »

La ligne N_2 ci-dessus invoque la **loi de Gauss**, c'est-à-dire l'intégrale d'un flux sur une surface fermée. Les articles N_0 et N_2 emploient par ailleurs l'expression « **contrainte de Gauss** » au sens de la gravité quantique à boucles — l'invariance sous $SU(2)$ aux nœuds du réseau. *Ce sont deux objets distincts qui portent le même nom.* La conjecture d'apaisement s'appuie sur le premier ; les résultats de N_0 et N_2 qui mentionnent le second ne la confirment donc pas, et il serait fautif de les lire comme tels.

L'ordre est forcé par le bord. Cette définition explique la *succession* que la conjecture 1 affirme. La raison est le théorème de Stokes, dont la forme générale

$$\int_{\partial c_k} \omega_{k-1} = \int_{c_k} d\omega_{k-1} \quad (6)$$

lie le couplage en dimension k à celui en dimension $k-1$. Une grandeur intégrable sur une cellule de dimension k n'a de contenu que si son *bord*, de dimension $k-1$, porte déjà la grandeur du rang inférieur : on ne définit pas un flux à travers une surface sans disposer de ce qui circule le long de son contour. La hiérarchie des apaisements est donc celle du complexe des dimensions, et l'ordre N_1, N_2, N_3, N_4 n'est pas un choix mais une conséquence.

Ce que la définition rend testable

Trois épreuves deviennent disponibles.

- (i) *Dualité.* Le capital de N_k doit s'intégrer naturellement sur des cellules de dimension k , et non d'une autre. Si le capital d'un niveau se révélait dual de cellules d'un autre rang, la correspondance tombe.
- (ii) *Exclusivité.* Deux capitaux ne peuvent pas être duaux des mêmes cellules. Si deux niveaux relevaient du même k , la correspondance ne serait plus une bijection et l'ordre perdrait son sens.
- (iii) *Chaînage.* La grandeur qui apaise la dimension k doit avoir pour donnée de bord celle qui apaise la dimension $k-1$, au sens de (6). Une rupture du chaînage à un rang quelconque réfuterait l'ordre, même si chaque appariement pris isolément tenait.

Une objection à écarter : le cercle

On objecte parfois qu'un cercle est une variété de dimension 1, de sorte que « fermer exigerait deux dimensions » ne serait pas un théorème. L'objection porterait si la définition faisait intervenir la dimension de l'objet *qui se referme*. Ce n'est pas le cas : la définition 1 fait intervenir la dimension de la **cellule dont la grandeur duale devient non triviale**.

Un cercle est bien de dimension 1, mais il *borde* une 2-chaîne, et ce qui devient non nul en se refermant est l'intégrale sur cette 2-chaîne, non sur le cercle. C'est exactement la structure de (6) : le bord est de dimension $k-1$, la grandeur duale vit en dimension k . *Ce que N_2 apaise n'est donc pas la contrainte de la courbe, mais celle de la surface qu'elle enclôt* — et la masse est le flux à travers cette surface.

Deux réserves, dont une sérieuse

(i) *L'appareil est emprunté.* Parler de formes, de bord et de Stokes suppose une variété différentiable, c'est-à-dire une structure qui n'est pas disponible à N_0 et qui relève au plus tôt de N_2 . Cette définition **décrit** donc la contrainte depuis un niveau supérieur ; elle ne la *constitue* pas. Le procédé est le même que pour le seuil de Kolmogorov (§8.5.2) et il est licite au même titre, à condition d'être déclaré : ce qui constitue la contrainte reste la trivialité du couplage à N_0 , qui est un fait combinatoire ; l'écriture différentielle n'en est que la traduction commode.

(ii) *Les deux derniers appariements sont faibles.* Que l'énergie s'intègre le long d'un chemin et que la masse soit le flux d'une surface fermée sont des faits de la physique établie. Que la forme soit une densité volumique et le sens une intégrale d'histoire sont des *analogies*, dont ni la conservation ni même la nature de grandeur ne sont établies. Les rangs 3 et 4 de la table doivent donc être lus comme programmatiques, et l'épreuve (iii) ne pourra les concerner que lorsque les articles correspondants auront donné à ces capitaux une définition assez ferme pour qu'on puisse en calculer une intégrale.

Une remarque, enfin, sur le rapport de cette définition au verrou achiral. On pourrait objecter que l'intégration sur une cellule requiert une *orientation* de celle-ci, et que le théorème 5 l'interdisant à N_0 , les quatre couplages seraient bloqués par une seule et même cause — de sorte que l'acte unique de N_1 les débloquerait tous à la fois, ruinant la succession. L'objection ne porte pas, et distinguer les deux blocages est instructif. L'orientation

est ce qui donne un *signe* à l'intégrale ; la grandeur duale est ce qui lui donne une *valeur*. N_1 fournit le signe, une fois pour toutes, et c'est son acte unique ; il fournit en outre la première valeur, celle du rang 1. Les rangs supérieurs disposent alors du signe mais restent sans valeur, et c'est en cela que leur contrainte subsiste. Ce que la succession ordonne n'est pas l'orientation, qui n'arrive qu'une fois, mais l'apparition des intégrandes.

2.6.6 Deux échelles d'assignation, à ne pas confondre

Le programme assigne les quatre fonctions à *deux échelles différentes*, et un même objet peut donc relever de deux opérateurs distincts sans qu'il y ait la moindre contradiction.

L'échelle de la marche. À chaque niveau correspond l'opérateur g^k de même rang — R pour N_1 , D pour N_2 , H pour N_3 , L pour N_4 — selon la signature $\dim g^k = k$ énoncée en §2.6. C'est de cette assignation que relève le *capital* du niveau, et c'est elle qui commande la conjecture d'apaisement dimensionnel.

L'échelle interne. À l'intérieur d'un niveau, les quatre fonctions se répartissent de nouveau, cette fois entre les structures propres au matériau du niveau — ses sous-niveaux, ses nombres quantiques, ses degrés de liberté. Cette seconde assignation ne suit pas la première, et n'a aucune raison de la suivre : elle porte sur d'autres objets.

La confusion typique, et son remède

La masse en fournit l'exemple le plus net. À l'échelle de la marche, N_2 est porté par D , et son capital est la masse : c'est l'énoncé du présent article. À l'échelle interne de N_2 , la masse est le Casimir des translations $\mathbb{R}^4$, groupe non compact, ouvert, sans condition de périodicité — donc, par le critère de compacité, elle relève de R . **Les deux énoncés sont vrais et ne portent pas sur le même objet** : le premier sur le niveau, le second sur un nombre quantique à l'intérieur du niveau.

Formulé en une phrase : *la phase interne qui prépare un passage n'est pas l'opérateur du passage*. Confondre les deux conduit à croire que le programme s'est contredit, alors qu'il a simplement changé d'échelle sans le dire.

Cette dualité n'est pas un artifice de commodité : elle est la conséquence directe du principe de récursivité (§5.9). Si la même grammaire opère identiquement à chaque niveau, alors elle opère aussi à l'intérieur de chaque niveau, et rien n'oblige les deux applications à coïncider. Ce qui serait surprenant, ce serait qu'elles coïncident.

Deux emplois du mot « discriminer »

Un second terme demande la même précaution. Dans cet article, *discriminer* désigne ce que le théorème 5 interdit : séparer les deux boucles miroir, g de g^{-1} . Aucune grandeur achirale ne le peut, à aucun niveau inférieur à N_1 .

L'article N_3 emploie le même verbe dans un tout autre sens, en écrivant que *la boucle de N_{-1} devient discriminante à N_3 , et pas avant*. Il s'agit là de séparer les **agrégats des systèmes organisés** — la boucle de régulation étant le critère qui les distingue — et non de séparer deux orientations. Le constat de N_3 est d'ailleurs juste et instructif : le critère fondateur du programme est resté sans emploi pendant trois niveaux parce qu'aucun objet de N_0 à N_2 n'était assez composé pour porter une boucle. *Il ne contredit donc en rien le verrou*, dont il ne parle pas.

Trois emplois du mot « chiralité »

Le même souci de niveau s'applique à un terme que le programme emploie dans trois acceptions distinctes, et qu'il faut séparer.

À N_{-1} , la chiralité est l'**orientation des deux boucles miroir**, g contre g^{-1} : une propriété du parcours, dont le théorème 5 établit qu'aucune grandeur achirale du substrat ne la lit.

À N_1 , elle désigne le **choix de la racine J** , c'est-à-dire la sélection de l'un des deux caractères fidèles ; c'est le seul choix nouveau du niveau, et sa valeur est une convention, qu'aucune observable ne lit.

À N_2 , elle désigne la **chiralité γ_5** , propriété algébrique d'une représentation — laquelle des deux extensions de $V_{1/2}$ à $SL(2, \mathbb{C})$ l'objet réalise.

Les trois sont indépendantes. En particulier, le résultat de N_2 selon lequel sa table est *chiralement symétrique*, un objet massif possédant nécessairement les deux composantes, ne dit rien de l'orientation des boucles de N_{-1} ni du signe choisi à N_1 : il porte sur γ_5 et sur lui seul.

2.6.7 L'écho entre les deux registres

Les deux lectures emploient la même indexation, et il serait négligent de ne pas le relever. La k -ième fonction construit la k -ième dimension à l'intérieur de N_0 , et elle domine le k -ième niveau *au-dessus* de N_0 . R fait l'arête et domine N_1 ; D fait l'aire et domine N_2 ; H fait le volume et domine N_3 ; L fait l'axe et domine N_4 .

Conjecture 2 (Double rôle des fonctions). *L'indexation des échelons internes de N_0 et celle des niveaux supérieurs sont la même : la structure interne de l'arène préfigure la succession des niveaux qui se construiront sur elle.*

Si cette conjecture tient, elle dit quelque chose de fort sur l'économie du programme : N_0 ne serait pas seulement le lieu où les niveaux supérieurs adviennent, mais contiendrait en réduction le plan de leur succession. Si elle ne tient pas, la coïncidence des deux indexations n'est qu'une commodité de numérotation, et il faudra le dire. Elle est énoncée ici précisément pour pouvoir échouer.

2.6.8 N_{-1} : critère de discernabilité

- $Nf_{-1,0}$: le **Dit**, distinction primordiale (tracé de la première frontière, le triplet $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \varphi)$).
- $Nf_{-1,1}(R)$: **flux asymétrique orienté**, discernabilité orientée portée par δ ; le sens est invisible aux invariants *symétriques* de N_{-1} et n'est *ré-imposé* qu'à N_1 .
- $Nf_{-1,2}(D)$: **flux réciproque maximal**, polarisation maximale ; homogène ou hétérogène.
- $Nf_{-1,3}(H)$: **flux asymétrique inverse**, distinctions ordonnées hiérarchiquement.
- $Nf_{-1,4}(L)$: **flux réciproque interne et externe nul**, $\mathbb{Z}_4$ épuisé ; système logique autonome constitué.

Transition : la structure close requiert une métrique : $Nf_{-1,4} = Nf_{0,0}$, le Bit.

2.6.9 Les critères de saturation aux niveaux supérieurs

La condition unique (2) n'a d'intérêt que si elle s'applique ailleurs qu'à N_{-1} . Les paragraphes qui suivent en donnent la lecture pour les cinq niveaux supérieurs. Ils excèdent le périmètre démontré de cet article et sont donnés à titre de *cadre* : ils montrent quelle forme prend la saturation quand le capital change de nature, et permettent de vérifier que le principe $Nf_{x,4} = Nf_{x+1,0}$ n'est pas taillé sur mesure pour le seul substrat logique.

Ce qui est démontré, étayé, ou programmatique

La correspondance pour N_{-1} est établie dans le corps de cet article. Celles pour N_0 et N_1 sont étayées par les articles consacrés à ces deux niveaux [2, 3]. Celles pour N_2 à N_4 sont des programmes de recherche. Surtout, les attributions d'interactions fondamentales aux fonctions — gravitation à R , force forte à D , électromagnétisme à H , force faible à L — restent des **analogies heuristiques**, conformément au point 3 des questions ouvertes du bilan critique ; elles sont reproduites ici parce qu'elles font partie du cadre, non parce qu'elles seraient acquises.

2.6.10 N_0 : critère géométrique

Le critère de N_0 est la **géométrie** — l'information gravée dans les dimensions de l'espace-temps. La séquence dimensionnelle est la description exacte du développement de la boucle fonctionnelle de N_0 selon ce critère :

- $Nf_{0,0}$: le **Bit** — le **noeud** (le grain ; l'article N_0 réserve le mot « point » aux vingt-quatre grains qui entourent un sommet) sans dimension. C'est la Rupture de $Nf_{-1,4}$: la discernabilité logique s'est refermée et ouvre l'espace informationnel. Le noeud est l'information encodable non encore spatialisée.
- $Nf_{0,1}(R)$: le noeud qui s'étire — **1D, la ligne**. La propagation orientée : quelque chose quitte le point dans une direction. *Interaction* : *gravitation* — première à se découpler, portée infinie, couplage universel à la masse-énergie. La ligne sature quand toute la longueur disponible est occupée : la surface devient nécessaire.
- $Nf_{0,2}(D)$: la ligne qui se referme — **2D, la surface**. La polarisation réciproque : l'échange symétrique crée une aire. *Interaction* : *force forte* — confinement, $SU(3)$, polarisation maximale (lié ou libre, rien entre). La surface sature : le volume devient nécessaire.
- $Nf_{0,3}(H)$: la surface qui se referme — **3D, le volume**. L'intégration hiérarchique : la profondeur s'ajoute aux deux dimensions. *Interaction* : *électromagnétisme* — flux rentrant sélectif, charge, jauge $U(1)$. Le volume sature : le temps devient nécessaire.

- $Nf_{0.4} (L)$: le volume qui se *referme* — **4D, la durée**, axe d'ordre sans orientation (le temps orienté attend N_1). La liaison interne : ce qui était volume acquiert une succession. *Interaction : force faible* — spin, bosons $W^\pm, Z^0$, dernier découplage cosmologique. Le temps sature : $Nf_{0.4} = Nf_{1.0}$, l'onde émerge.

Ce que $Nf_{0.4}$ produit comme environnement transformé : L'arène, avec ses quatre dimensions et sans dynamique, ne peut plus être décrite sans propagation — les ondes et les champs *deviennent nécessaires* : c'est $Nf_{1.0}$.

2.6.11 N_1 : critère d'énergie ; l'onde comme manifestation de R

Le critère de N_1 est l'**énergie**. Le capital $C_1 = E$ porte les propriétés de $Nf_{1.1} = R$:

- $R = g^1$ est le *générateur* du groupe : aucun point fixe, flux orienté, orbite sans retour immédiat. L'**onde** est exactement cela : elle se propage sans se localiser, elle quitte sa source, elle est périodique (orbite de période 4 dans $\mathbb{Z}_4$, oscillation dans le temps).
- R génère tous les autres opérateurs ($D = R^2, H = R^3, L = R^4$). De même, l'**énergie** est la forme la plus fondamentale de capital à N_1 : toutes les autres grandeurs physiques (masse, charge, spin) en sont des cas particuliers ou des transformations.
- La dualité onde-corpuscule en physique quantique est la tension entre R (propagation, aucun point fixe) et D (involution, localisation) : une onde qui s'instancie en $Nf_{1.2} = D$ devient un paquet d'onde localisé — la particule.

La progression des fonctions suit l'ordre **cosmologique de découplage des interactions** lors du refroidissement :

- $Nf_{1.0}$: l'**onde** — perturbation oscillatoire élémentaire. Capital : énergie E .
- $Nf_{1.1} (R)$: **longueur d'onde** (fréquence) : détermine l'énergie de l'onde. C'est le capital fondamental du niveau. Paramètre fondamental invariant par propagation ; détermine l'identité de l'onde et l'énergie qu'elle porte ($E = h\nu$). C'est le capital de N_1 , conservé à travers toutes les transformations dans un milieu homogène.
- $Nf_{1.2} (D)$: **phase** — c'est la grandeur de la différenciation interne. C'est elle qui gouverne les interférences constructives/destructives, autrement dit les échanges entre ondes. L'association D /phase est forte : dans $\mathbb{Z}_4$, D est l'involution (son propre inverse), et la phase est cyclique modulo 2π , avec un déphasage de π qui inverse exactement l'onde — propriété involutive remarquable. Paramètre qualitatif cyclique qui différencie deux ondes de même fréquence. Gouverne les interférences constructives et destructives — les échanges entre ondes. Analogie de l'involutivité de g^2 : un déphasage de π inverse exactement l'onde.
- $Nf_{1.3} (H)$: **amplitude** — paramètre quantitatif qui détermine l'intensité et la puissance transportée ($I \propto A^2$). Grandeur dégradable par la propagation et l'absorption — elle se consomme là où la fréquence se conserve, cohérent avec $H = R^{-1}$ dans $\mathbb{Z}_4$.
- $Nf_{1.4} (L)$: **polarisation** — paramètre qualitatif qui décrit l'orientation interne du champ dans le plan transverse — la cohérence structurelle de l'onde, sa "forme". Définit les couplages sélectifs entre ondes et gouverne la statistique d'assemblage, cohérent avec le rôle d'identité de g^4 .

Statut de cette attribution. Associer à chaque fonction un *paramètre* d'une onde isolée — fréquence, phase, amplitude, polarisation — est une **lecture heuristique**, du même rang que les analogies de la strate B. Ce n'est pas l'escalier des sous-niveaux de N_1 : l'article consacré à ce niveau le construit par *composition*, chaque échelon étant le système minimal obtenu en appliquant la fonction aux objets de l'échelon précédent ; la phase y apparaît sous R , comme donnée de la première relation entre deux modes, et la clôture L y est le paquet cohérent. Aucun résultat du présent article ne dépend de cette attribution.

Ce que $Nf_{1.4}$ produit comme environnement transformé : Des quanta localisés avec spin ne peuvent plus être décrits sans masse stable — les **particules massives** *deviennent nécessaires* : c'est $Nf_{2.0}$.

2.6.12 N_2 à N_4 : particule (D), forme (H), symbole (L)

N_2 : **critère de masse ; la particule comme manifestation de D .**

Le capital $C_2 = m$ (masse) porte les propriétés de $Nf_{2.1} = D$:

- $D = g^2$ est une *involution* : $D^2 = L$. Deux applications ramènent au point de départ — c'est la **localisation**. La **particule** est exactement cela : elle a une position, une masse, elle *reste*. La dualité onde-corpuscule est la tension R (onde, propagation) / D (particule, localisation) : une onde qui s'involutionne devient un paquet localisé.

- D est la symétrie maximale sur $\{0,1\}^2$: il échange tout avec tout. La masse est la propriété la plus symétrique des particules : invariante par toutes les rotations et translations (contrairement à la charge ou au spin).

$Nf_{2,0}$ = la particule ; $Nf_{2,1}$ à $Nf_{2,4}$ = les quatre nombres quantiques (n, ℓ, m, s) ; $Nf_{2,4} = Nf_{3,0}$: l'atome stable crée un environnement chimique qui rend la morphogenèse *nécessaire*.

N_3 : critère de forme ; la topologie comme manifestation de H .

Le capital $C_3 = \mathcal{F}$ (forme) porte les propriétés de $Nf_{3,1} = H$:

- $H = g^3 = (g^1)^{-1}$ est le flux *rentrant* : l'intégration, ce qui revient vers l'intérieur. La **forme topologique** est exactement ce qui se définit par ses relations *internes* : la topologie d'un organisme, c'est ce qui reste invariant par déformation continue, c'est la structure de ses liens intérieurs.
- H est l'inverse de R : de même, la forme est la *mémoire* de la propagation — une onde qui revient vers elle-même (standing wave) produit une forme stable. La morphogenèse est un flux rentrant : l'information qui guide la forme vient de l'intérieur du système en développement.

$Nf_{3,0}$ = la cellule/molécule ; $Nf_{3,1}$ à $Nf_{3,4}$ = les quatre opérateurs morphologiques ; $Nf_{3,4} = Nf_{4,0}$: l'organisme autonome crée un environnement comportemental qui rend la communication symbolique *nécessaire*.

L'escalier de N_3 est une spirale

L'article N_3 précise les quatre opérateurs morphologiques, et la réponse est *structurelle* plutôt qu'énumérative : l'escalier de N_3 n'est pas une suite de cinq marches mais une **spirale de quatre tours**, notée $Ns_{3,t,k}$ où t numérote le tour et k la fonction. Le hadron est $Ns_{3,I,0}$, la cellule procaryote $Ns_{3,II,3}$, la biosphère $Ns_{3,IV,3}$.

La raison vaut d'être retenue ici, car elle concerne la règle générale des échelons. Aux niveaux N_0 à N_2 , l'objet produit par L est d'une **autre nature** que celui reçu par R — une mousse n'est pas un nœud, un paquet cohérent n'est pas un mode, une configuration fermée n'est pas une particule — de sorte que le cycle ne peut pas se rejouer sur son propre produit. À N_3 il en va autrement : la clôture d'un tour produit une *structure composée*, et une structure composée est exactement ce que R prend en entrée.

La règle des cinq échelons vaut donc par tour, non par niveau, et la clôture du niveau est $Ns_{3,IV,4} = Nf_{4,0}$. Ce n'est pas une exception à la grammaire : c'est ce qu'elle produit lorsque son capital devient de même type en entrée et en sortie.

N_4 : critère de sens ; le symbole comme manifestation de L .

Le capital $C_4 = \mathcal{S}$ (sens) porte les propriétés de $Nf_{4,1} = L$:

- $L = g^4$ est l'*identité* : chaque élément se retrouve lui-même, coprésence sans déplacement. Le **symbole** et le **lien social** sont exactement cela : une institution, une norme, un symbole ne bougent pas — ils *coexistent*, ils unissent sans fusionner (le signifiant et le signifié restent distincts et liés).
- $L = g^4$ clôt le cycle engendré par g^1, g^2, g^3 : le symbole est ce qui persiste après que R, D et H ont épuisé leurs transformations — il n'existe pas sans eux, mais n'est pas leur produit au sens algébrique.

$Nf_{4,0}$ = le symbole ; $Nf_{4,1}$ à $Nf_{4,4}$ = les quatre fonctions du langage ou de l'institution (à préciser dans l'article N_4).

Remarque 4 (Causalité ascendante et nécessité). *La formulation "X devient nécessaire" n'est pas une métaphore : elle désigne une nécessité structurelle. Quand $Nf_{x,4}$ referme le niveau Nx , le système émergent autonome crée un environnement que les invariants du niveau Nx ne peuvent plus décrire — un nouveau type de capital est requis pour en rendre compte. Ce n'est pas une loi extérieure qui impose le niveau supérieur : c'est le niveau inférieur lui-même, en se fermant, qui rend le niveau supérieur **inévitabile**. C'est la causalité ascendante : non pas que des propriétés supérieures "descendent" s'appliquer aux éléments inférieurs, mais que les éléments inférieurs, en s'organisant, créent les conditions de leur propre dépassement.*

Remarque 5 (Statut de ces correspondances). *Les correspondances ci-dessus — en particulier les attributions $Nf_{0,1}$ à $Nf_{0,4}$ aux quatre dimensions et $Nf_{1,1}$ à $Nf_{1,4}$ aux quatre interactions — sont des **hypothèses de structure** du programme. La correspondance pour N_{-1} est établie dans cet article ; celles pour N_0 et N_1 sont étayées par les articles existants ; celles pour N_2 à N_4 sont des programmes de recherche. Le principe $Nf_{x,4} = Nf_{x+1,0}$ est la thèse centrale — la plus fondamentale du programme — dont la démonstration formelle complète reste à construire niveau par niveau.*

2.7 Le nombre de tours d'une spirale

Les articles consacrés à N_3 et à N_4 établissent que ces deux niveaux ne s'écrivent pas comme une suite de cinq échelons mais comme une *spirale* : la clôture d'un cycle y étant du même type que l'entrée de R , le cycle se rejoue sur son propre produit. Tous deux comptent **quatre tours**, et tous deux donnent ce nombre pour un constat — l'article N_4 écrit explicitement que rien n'interdirait un tour V et que quatre n'est pas dérivé.

Cette section en propose la dérivation. Elle ne fait appel qu'à deux résultats acquis, et elle produit en outre une conséquence : la terminaison, ou la non-terminaison, de la spirale s'en déduit, et elle explique pourquoi N_3 ouvre un niveau suivant quand N_4 n'en ouvre aucun.

2.7.1 L'argument

Proposition 4 (Les tours instancient $\mathbb{Z}_4$). *Soit un niveau spiralé, c'est-à-dire un niveau dont la clôture d'un cycle est du même type que l'entrée de R . Sous le principe de récursivité (§5.9), la suite de ses tours instancie $\mathbb{Z}_4$: les tours viennent par groupes de quatre, et dans l'ordre R, D, H, L .*

Argument. Le principe de récursivité pose que la même grammaire opère identiquement à chaque échelle, et l'article ne lui connaît pas d'exception motivée. Or les tours d'une spirale forment une échelle : chacun reçoit un objet, l'élabore et le referme, exactement comme un échelon reçoit une configuration et la transforme. Si la grammaire y opère, elle y opère avec ses quatre composantes et avec sa clôture $g^4 = e$, ce qui donne quatre tours — un pour chaque fonction — et leur ordre. L'argument est donc une *application* du principe de récursivité à une échelle où on ne l'avait pas appliqué, non un principe nouveau. $\square$

Ce que cette proposition réduit, et ce qu'elle ne crée pas

Elle ne dérive pas le nombre quatre *à partir de rien* : elle le dérive de $\mathbb{Z}_4$. Elle transfère donc la question « pourquoi quatre tours ? » à la question « pourquoi $\mathbb{Z}_4$? », déjà tranchée au chapitre 3.7 par le critère de Gray et sa moindre action. *C'est une réduction, non une explication ex nihilo*, et son intérêt tient précisément à ce qu'elle ne fait apparaître aucune ressource nouvelle. Elle ne dérive pas davantage *qu'un niveau spiralé* : c'est l'affaire du théorème de la spirale, qui lui est antérieur.

2.7.2 Le contrôle sur les deux niveaux spiralés

Le test n'est pas complaisant, et c'est ce qui lui donne son poids : les tours ont été nommés dans les articles N_3 et N_4 pour des raisons de domaine, sans que la grammaire y soit anticipée.

	tour de N_3	son opération	tour de N_4	son opération
R	I — nucléaire etmoléculaire	le noyau est fait de hadrons <i>reproduits</i> ; l'atome, la molécule suivent	I — sémiotique	le lexique est fait de symboles <i>reproduits</i> à l'identique
D	II — cellulaire	la membrane <i>distingue</i> un dedans d'un dehors	II — interindividuelle	le « je » et le « tu » <i>différencient</i> les porteurs
H	III — organismique	tissus <i>subordonnés</i> , organes <i>subordonnés</i> à une fonction	III — institutionnelle	rôles et droit font <i>primer</i> certains énoncés
L	IV — écologique	cycles couplés : <i>le tout se referme</i> en biosphère	IV — civilisationnelle	traditions et aires <i>se referment</i> en civilisation globale

Deux niveaux indépendants, huit tours, huit appariements. Les positions H et L sont les plus probantes, car les deux articles y emploient spontanément le vocabulaire des opérateurs — *subordonner* d'un côté, *se refermer* de l'autre — sans avoir cherché la correspondance.

2.7.3 La terminaison d'une spirale

Une objection se présente, et la réponse donne la terminaison. *Si les quatre tours s'épuisent, un niveau spiralé sature* — or l'article N_4 démontre que N_4 ne peut pas saturer, et en tire qu'il n'existe pas de N_5 .

La réponse consiste à appliquer le théorème de la spirale *une échelle plus haut*, ce qui est le geste même que la proposition 4 autorise.

Corollaire 2 (Terminaison d'une spirale). *Le méta-cycle se referme sur son tour L , dont le produit est la clôture du niveau. Deux cas s'excluent :*

- (i) **Le méta-cycle s'épuise.** *Si ce produit n'est pas du même type que l'entrée du tour R , il ne peut pas être rejoué : les quatre tours épuisent le niveau, et leur clôture ouvre le suivant.*
- (ii) **Le méta-cycle se rejoue.** *Si ce produit est du même type, un second groupe de quatre tours s'ouvre, et ainsi indéfiniment : le niveau ne sature pas.*

Les deux niveaux spiralés connus se répartissent exactement, et sans ajustement :

- N_3 **relève de (i)** : une biosphère n'est pas un hadron. Le méta-cycle ne peut pas se rejouer, les quatre tours épuisent le niveau, et sa clôture ouvre N_4 . C'est exactement ce que l'article N_3 constate par ailleurs, sans en donner la raison.
- N_4 **relève de (ii)** : une civilisation globale est encore un corpus de symboles, encore interprétable — donc du type même de l'entrée du tour sémiotique. Le méta-cycle se rejoue, et le niveau ne sature pas.

L'itération sans borne de N_4 et la non-terminaison de son méta-cycle sont une seule chose

Le résultat mérite d'être souligné, car il resserre le programme au lieu de l'alourdir. L'article N_4 démontre qu'il n'y a pas de N_5 en invoquant trois faits : l'itération est sans borne, le matériau ne manque jamais, et aucun corpus assez riche ne se referme. *Le premier de ces faits est précisément le cas (ii) du corollaire 2* : dire que le méta-cycle de N_4 se rejoue indéfiniment et dire que son itération est sans borne sont deux formulations d'un même énoncé.

La dérivation du nombre de tours **consolide** donc le théorème de non-existence de N_5 au lieu de le menacer, et deux arguments qui paraissaient indépendants n'en font plus qu'un.

Elle précise en outre une formule de l'article N_4 : « rien n'interdit un tour V » devient *il n'y a pas de cinquième tour, il y a un premier tour d'un second méta-tour*. La notation devrait s'en ressentir et gagner un indice : $N_{S4.m.t.k}$, où m numérote le méta-tour.

2.7.4 Statut, réserves, réfutation

Deux faiblesses, à déclarer

(i) *L'appariement est lu a posteriori, et sur deux cas.* Deux niveaux spiralés sont tout ce dont le programme dispose, et huit appariements ne constituent pas une induction robuste. Ce qui donne du poids au contrôle n'est pas le nombre mais le fait que les deux articles emploient d'eux-mêmes le vocabulaire des opérateurs aux positions H et L .

(ii) *Le critère « du même type » reste qualitatif.* « Une civilisation globale est encore symbolique » contre « une biosphère n'est pas un hadron » : l'opposition est claire à l'usage et floue en droit. C'est du reste la faiblesse que le théorème de la spirale portait déjà, et le corollaire 2 l'hérite sans l'aggraver — mais sans la résoudre.

Quatre voies réfutent l'énoncé, et trois se vérifient sur les articles existants sans expérience :

- (i) un niveau spiralé dont les tours n'épousent pas l'ordre R, D, H, L ;
- (ii) un niveau spiralé dont le nombre de tours n'est pas un multiple de quatre ;
- (iii) à N_4 , un cinquième tour dont l'opération ne répète pas celle du tour I ;
- (iv) à N_3 , un cinquième tour tout court — que le corollaire 2 interdit, puisque la clôture y change de type.

Une régularisation préalable est requise à N_3

L'indexation interne de N_3 n'est pas uniforme d'un tour à l'autre. Le tour I y porte .1 = R , .2 = D , .3 = H et s'arrête là ; les tours II à IV portent .1 = D , .2 = H , .3 = L , sans position R . La chaîne est pourtant continue : la biomolécule, décrite comme une « molécule refermée en séquence », est une clôture, donc le L du tour I, et elle est indexée $N_{S3.II.0}$.

Autrement dit, la frontière de tour est placée après H dans un cas et après L dans les autres. *Cela n'affecte pas l'appariement méta*, qui porte sur le caractère dominant de chaque tour et non sur ses positions internes ; mais la régularisation — une position .0 uniforme, puis R, D, H, L — est un préalable à tout énoncé propre à l'échelle des tours.

2.8 Ce que cet article établit dans ce cadre

Pour N_{-1} , cet article démontre :

1. **Existence et unicité de la boucle** : parmi les 24 permutations sur $\{0, 1\}^2$, une unique paire (RDHL et RLHD) satisfait les critères de fermeture conservative.
2. **Les quatre fonctions comme composantes de $\mathbb{Z}_4$** : dérivées sans hypothèse physique.
3. **Le principe $Nf_{-1.4} = Nf_{0.0}$** : la clôture L ouvre le Bit, dans lequel R démarre le cycle de N_0 .

Chacune de ces trois affirmations est falsifiable, et les conditions dans lesquelles elle échouerait sont énoncées dans le bilan critique. Les trois premiers des cinq critères de réfutation qui y figurent sont vérifiables par calcul direct.

3 Le niveau N_{-1} : le substrat logique fondamental

3.1 Statut ontologique du niveau N_{-1}

Le niveau N_{-1} est le substrat pré-physique du modèle : il ne décrit pas encore l'espace, le temps ou l'énergie. Il décrit les **structures logiques et mathématiques pures** (relations, opérations, transformations) et surtout les **possibilités de discernabilité** : les conditions logiques qui rendront la distinction possible, sans qu'elle soit encore actualisée sous forme d'information.

Statut positif : le substrat de la possibilité. La caractérisation par négation (pas d'espace, pas de temps, pas d'énergie, pas d'information) doit être complétée par une caractérisation positive. N_{-1} est l'*espace des distinctions possibles* : l'ensemble des configurations qu'un système pourrait adopter, des transformations qu'il pourrait subir, et des relations qu'il pourrait entretenir, avant que l'une de ces possibilités ne soit sélectionnée par instanciation physique. Là où N_0 est le domaine du *donné* (une configuration actuelle de l'espace-temps), N_{-1} est le domaine du *donnable* : ce qui pourrait être distingué, sans nécessité que cela le soit. Cette distinction modale (possibilité versus actualité) est ontologiquement antérieure à toute distinction physique : avant qu'un état ne soit, il faut qu'il *puisse être*. L'objet propre de N_{-1} est cette modalité même.

3.1.1 Positionnement : ce qui distingue cette approche

Plusieurs programmes placent, comme celui-ci, une couche non spatiale et non temporelle sous la physique. Il importe de dire non pas seulement avec lesquels le présent travail s'accorde, mais surtout *en quoi il s'en sépare*, car la différence porte sur la méthode plus que sur l'intuition de départ.

Wheeler, *It from Bit* [4]. Toute entité physique tirerait son existence de réponses à des questions binaires. N_{-1} se situe un cran en deçà : il est la possibilité logique de la *question*, antérieure à la réponse. Là où la formule de Wheeler est un programme sans structure algébrique assignée, on propose ici un groupe déterminé ($\mathbb{Z}_4$) et un critère de sélection démontré.

Tegmark, *Mathematical Universe Hypothesis* [5]. La réalité physique *serait* une structure mathématique. La difficulté connue de cette thèse est son absence de principe de sélection : si toutes les structures existent, rien n'explique celle-ci. La position adoptée ici est plus étroite et, pour cette raison, plus contraignante : N_{-1} n'est pas le règne de toutes les structures mais un noyau minimal, et ce noyau porte son propre critère de sélection, la fermeture en boucle.

Théorie constructeur [16, 17]. Le rapprochement est le plus étroit, puisque cette théorie prend elle aussi pour objet premier le *possible* et l'*impossible* plutôt que les trajectoires. La divergence est de niveau : la théorie constructeur énonce des principes sur les tâches physiquement réalisables, donc sur un substrat déjà physique, alors qu'on travaille ici en amont de l'énergie et du temps, sur la seule discernabilité. Les deux approches ne se concurrencent pas ; elles se succéderaient plutôt.

Automates et systèmes combinatoires (Wolfram [19], ensembles causaux [18]). Ces programmes engendrent une physique à partir de règles discrètes, mais la règle y est *postulée* puis explorée par simulation. La démarche est ici inverse : la règle n'est pas choisie, elle est *sélectionnée* par un critère combinatoire interne (§5.7), et la sélection est démontrée, non observée.

Kirilyuk, science universelle de la complexité [20]. Le voisinage est ici d'ambition plus que de méthode : ce programme dérive lui aussi une hiérarchie de niveaux, y fait émerger l'espace et le temps du fonctionnement du système plutôt que de les poser en contenants, et tient que la discrétude doit être dérivée et non décrétée. Mais son socle est un problème d'interaction à N corps, dont la configuration ultime est un couple de protochamps attractifs : des champs, une arène, une interaction. *C'est déjà de la physique*, c'est-à-dire, dans les termes employés ici, un N_0 dépouillé et non un substrat pré-physique. La divergence est donc, une fois encore, de niveau. Elle est aussi de contenu : l'universalité y est portée par une équation unique et une symétrie de conservation, sans aucun analogue des quatre fonctions ni de leur ordre. *Une précaution de lecture* : le paramètre κ y désigne un régime de chaotité maximale en $\kappa \simeq 1$, et non l'équilibre des phases.

En résumé, ce qui est revendiqué ici n'est ni une nouvelle ontologie ni un cadre de plus, mais un point technique : sur le plus petit espace où la question se pose, la structure de boucle n'est pas libre. Cette revendication est étroite, et c'est précisément ce qui la rend attaquable.

Sur le plan formel :

$$N_{-1} := (\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{T}, \mathcal{D}) \quad (7)$$

où $\mathcal{M}$ est un ensemble de structures mathématiques, $\mathcal{O}$ un ensemble d'opérations sur $\mathcal{M}$, $\mathcal{T}$ des transformations préservant certains invariants, et $\mathcal{D}$ une **mesure de discernabilité potentielle**, degré de séparabilité logique entre configurations, indépendamment de tout support physique.

Remarque 6 (Du potentiel logique à l'information physique). *On pourrait être tenté de noter cette quatrième composante $\mathcal{I}$, par anticipation de l'information. Ce choix serait trompeur : l'information est un concept qui n'émerge qu'à N_0 , lorsqu'un support physique permet d'actualiser les distinctions. La notation $\mathcal{D}$ rend compte du fait que seule la possibilité de distinction existe à ce niveau : la transition $N_{-1} \rightarrow N_0$ est le passage du potentiel logique à l'information effective.*

La **contrainte fondamentale** de N_{-1} est la **réversibilité** : toutes les transformations de $\mathcal{T}$ sont des bijections. Il n'y a ni création ni destruction de structure, analogue logique du premier principe de la thermodynamique, mais à un niveau pré-physique où l'énergie n'existe pas encore. En l'absence de flèche du temps, toute transformation est intrinsèquement réversible ; l'irréversibilité est un phénomène émergent lié à l'instanciation physique des distinctions [12]. Cette contrainte n'est pas optionnelle : elle est constitutive du niveau, et pour une raison qui n'est pas thermodynamique mais *structurelle*, développée au §3.6 : N_{-1} **n'a pas d'extérieur**. Effacer n'est jamais détruire sur place, c'est *exporter* une distinction vers un environnement ; le substrat étant le tout, il n'existe aucun dehors où la verser. Une distinction ne peut donc y être perdue, seulement transformée. La réversibilité impose ainsi que les transformations de $\mathcal{T}$ forment un **groupe** : fermeture par composition, existence d'un inverse pour chaque élément, identité. C'est cette structure de groupe qui rend possible la dérivation algébrique des sections suivantes.

3.2 Discernabilité potentielle : définition unifiée

Le capital de N_{-1} est la **discernabilité**. Pour la fonder sans ambiguïté, on ne part pas d'une mesure symétrique, mais d'une *unique* primitive **orientée** (une longueur de parcours) dont toutes les autres lectures (distance symétrique, chevauchement, capital) se déduisent.

La primitive : la longueur orientée δ . Soit $G \cong \mathbb{Z}_4$ le groupe *cyclique* agissant sur les configurations $\Omega = \{00, 01, 11, 10\}$. Il est mono-engendré, mais possède *deux* générateurs, g et $g^3 = g^{-1}$, images miroir l'un de l'autre ; fixons-en un, noté g (simple convention d'étiquetage, sur laquelle on revient plus bas). La **longueur orientée** de A vers B , relative à g , est le nombre minimal d'applications de g pour passer de l'une à l'autre :

$$\delta(A, B) := \min\{k \geq 0 : g^k \cdot A = B\}. \quad (8)$$

C'est une *quasi-distance* : elle vérifie $\delta(A, A) = 0$ et l'inégalité triangulaire, mais elle n'est **pas symétrique** ($\delta(A, B) \neq \delta(B, A)$ en général). Cette asymétrie est la *graine logique de la flèche du temps*, portée par le substrat lui-même et non ajoutée après coup. Mesurées depuis 00, les valeurs reproduisent *exactement* la hiérarchie des régimes, qui est donc **dérivée** :

$$\underbrace{\delta(\cdot, 01) = 1}_{R, \equiv} < \underbrace{\delta(\cdot, 11) = 2}_{D, =} < \underbrace{\delta(\cdot, 10) = 3}_{H, \neq}, \quad g^4 = e \text{ referme le cycle } (L, \emptyset). \quad (9)$$

Le quatrième régime $\emptyset$ n'est pas un quatrième cran. Un point de lecture doit être fixé ici, faute de quoi la hiérarchie (9) paraîtrait incomplète, voire contradictoire. Les trois régimes $\equiv, =, \neq$ occupent les crans $\delta = 1, 2, 3$: ce sont les régimes *trans-frontières*, et ils s'ordonnent. Le régime $\emptyset$ (Liaison) ne prolonge pas cette échelle : il correspond à

$$\delta \equiv 0 \pmod{4}, \quad \text{c'est-à-dire au retour à l'identité } g^4 = e, \quad (10)$$

et non à un cran $\delta = 4$ qui serait « au-delà de $\neq$ ». C'est la raison structurelle pour laquelle la fusion « ne coûte rien » : la longueur orientée s'*annule* en bouclant, au lieu de croître. La chaîne $\equiv \leq = \leq \neq$ range donc légitimement les trois régimes qui traversent une frontière ; $\emptyset$ les referme.

Une objection à écarter. On opposera que l'entité fusionnée AB est *plus* discernable que ses composantes (§3.4.4), ce qui semblerait démentir $\delta = 0$. Il n'en est rien : les deux énoncés ne portent pas sur la même mesure. Le cran $\delta \equiv 0$ mesure la discernabilité *relationnelle* entre les deux domaines que L fond l'un dans l'autre ; l'accroissement de discernabilité porte, lui, sur l'objet *composite* AB vis-à-vis de A et de B , mesure distincte. *Le trajet est nul ; le produit du trajet ne l'est pas* — et c'est exactement ce qui fait de L l'opérateur de l'émergence plutôt qu'un opérateur de séparation extrême.

Deux orientations miroir, aucune privilégiée. Le choix de g ci-dessus fixe une orientation ; l'autre générateur $g^3 = g^{-1}$ définit la quasi-distance *miroir* $\delta_{g^3}(A, B) = \delta_g(B, A)$. À N_{-1} , **aucune des deux n'est privilégiée** : elles sont échangées par l'inversion $g \mapsto g^{-1}$, comme le sont les deux boucles RDHL et RLHD. Au substrat appartient donc l'*asymétrie elle-même* (le fait qu'une orientation existe, et que les deux versions diffèrent) et non un sens retenu. La « graine de la flèche du temps » est cette asymétrie, et non une direction choisie : la *sélection* de l'une des deux orientations (δ_g ou δ_{g^3} , c'est-à-dire le signe $\pm i$) est l'acte de N_1 , et sa valeur y est une convention inobservable (cf. ch. 6), non une donnée de N_{-1} . Écrire « $\delta := \delta_g$ » dans toute la suite est une simple convention d'étiquetage pour les calculs ; elle ne présuppose aucun sens physique, que le verrou achiral (théorème 5) interdit de fixer avant N_1 .

Le générateur n'est pas un niveau. L'écriture $N_{-1} = \langle g \rangle$ appelle une objection qu'il vaut mieux traiter d'emblée, car elle vise le fondement même du programme : si le substrat est *engendré*, ne faut-il pas poser sous lui un niveau de plus, un N_{-2} qui contiendrait g ? Et, la question se reposant indéfiniment, le modèle n'est-il pas exposé à une régression à l'infini ? Trois raisons l'excluent.

- (i) **Un niveau se définit par un capital et par les systèmes qui l'habitent.** N_0 a l'information, N_1 l'énergie, et chacun porte des boucles fermées (§1.1.4). g n'a ni capital ni systèmes : c'est une transformation unique, sans structure interne, qui ne satisfait aucun des deux critères.
- (ii) **Un niveau émerge du précédent, et cette émergence a un coût** (une constante de conversion, table 1). *Le passage de g à $\langle g \rangle$ n'en a aucun* : il n'y a là ni saturation, ni clôture, ni transition, mais une simple *application* — l'ensemble des puissances d'un élément.
- (iii) **g et $\langle g \rangle$ ne sont pas deux choses.** Le groupe *est* l'ensemble des puissances du générateur : nul écart entre eux, nul intervalle à franchir, donc rien qui puisse constituer une frontière au sens du §3.3. C'est une identité vue de deux côtés, non une relation entre deux strates.

Le générateur n'est donc pas un étage supplémentaire : c'est l'opération qui rend les étages possibles. Et l'on voit du même coup pourquoi le modèle peut s'arrêter là sans arbitraire. *Si g était un niveau, on demanderait légitimement ce qui l'engendre, et la régression s'ouvrirait.* Mais on ne demande pas ce qui engendre une opération : on demande ce qu'elle produit. La question « qu'y a-t-il sous g ? » n'est pas une question à laquelle le modèle refuse de répondre ; c'est une question mal formée, qui applique à une opération une exigence qui ne vaut que pour des étants. *Ce qui arrête la régression n'est pas une clôture postulée, mais un changement de catégorie.*

La distance symétrique $\mathcal{D}$ comme projection vers N_0 . En oubliant l'orientation, on obtient une vraie distance (symétrique, séparante, triangulaire), la distance de graphe sur le 4-cycle non orienté :

$$\mathcal{D}(A, B) := \min(\delta(A, B), \delta(B, A)). \quad (11)$$

Ce résultat est **central** pour tout l'article : l'oubli de l'orientation *est* la projection $N_{-1} \rightarrow N_0$. L'information de N_0 est symétrique, aveugle au sens de parcours, ce qui explique *a priori* pourquoi aucune grandeur « neutre » (l'entropie comprise) ne peut lire une orientation, et pourquoi seule une *phase géométrique* le peut (mécanisme de Carnot/Berry, ch. 6). La longueur orientée δ porte l'orientation (la structure asymétrique, non encore le sens sélectionné) ; la distance symétrique $\mathcal{D}$, son ombre désorientée, *devient* l'information. La symétrie de $\mathcal{D}$ n'est donc pas une propriété fondamentale du substrat, mais le résultat de cette projection.

Extension aux structures quelconques. Au-delà du seul $\mathbb{Z}_4$, la longueur orientée δ se généralise comme **longueur de parcours dans un graphe pondéré canonique** $(\mathcal{M}, \mathcal{T}, w)$, où le poids d'une arête encode la quantité d'information logique associée au choix de la transformation :

$$w(A, t(A)) := -\log_2 p(t | A), \quad p(t | A) = 1/\deg_{\mathcal{T}}(A) \quad (12)$$

La longueur orientée généralisée est :

$$\vec{\delta}(A, B) := \min_{\gamma: A \rightsquigarrow B} \sum_{k=1}^{\ell(\gamma)} w(\gamma_{k-1}, \gamma_k) \quad (13)$$

et la discernabilité symétrique en est, comme ci-dessus, la symétrisation $\mathcal{D}(A, B) = \min(\vec{\delta}(A, B), \vec{\delta}(B, A))$. Cette construction **contient les deux lectures usuelles comme cas particuliers** : la lecture géodésique s'obtient avec des poids uniformes (chaque transformation coûte autant), la lecture par chevauchement (Jaccard) avec des poids ensemblistes. Elle étend de plus le domaine de δ aux structures non-ensemblistes (groupes, catégories, algèbres), où le chevauchement n'aurait aucun sens. Le développement complet figure en Annexe E.

Les propriétés structurelles se répartissent alors entre les deux niveaux de lecture :

- **Indiscernabilité** : $\mathcal{D}(A, B) = 0 \iff A = B$ (et $\delta(A, B) = 0 \iff A = B$).
- **Discernabilité maximale** : $\mathcal{D}(A, B) = +\infty$ si A et B appartiennent à des composantes connexes disjointes.
- **Asymétrie de la primitive** : $\delta(A, B) \neq \delta(B, A)$ en général, l'orientation est une propriété *du substrat* N_{-1} , portée par δ .
- **Symétrie de la projection** : $\mathcal{D}(A, B) = \mathcal{D}(B, A)$ *par construction* (symétrisation de δ) ; elle caractérise non pas N_{-1} , mais son ombre N_0 , où l'orientation a été oubliée.
- **Inégalité triangulaire** : valable pour δ comme pour $\mathcal{D}$.

Le chevauchement comme instanciation ensembliste. Pour les frontières logiques entre domaines structurels, la lecture par chevauchement n'est pas une définition concurrente mais l'*instanciation ensembliste* de la même longueur :

$$\mathcal{D}(\mathcal{A} \mid \mathcal{B}) := \min_{A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}} \mathcal{D}(A, B) = \log_2 \left(\frac{|\mathcal{A} \cup \mathcal{B}|}{|\mathcal{A} \cap \mathcal{B}|} \right) \quad (\text{cas ensembliste}) \quad (14)$$

De la relation au capital. δ et $\mathcal{D}$ sont *binaires* ; le capital d'un système, lui, est *scalaire*. On lève ce décalage en posant que le capital de discernabilité d'un système $\mathcal{S}$ est le cardinal des configurations qu'il rend mutuellement discernables :

$$\mathcal{D}(\mathcal{S}) := |\{\text{configurations discernables atteintes}\}|, \quad \log_2 \mathcal{D}(\mathcal{S}) \xrightarrow{N_0} \text{information de Shannon}. \quad (15)$$

La boucle RDHL complète visite les quatre configurations, donc déploie $\mathcal{D} = 4$: c'est le maximum de discernabilité d'un Dit à deux bits. Son logarithme annonce le capital informationnel de N_0 , dont l'article N_0 fixe l'unité : un bit par face partagée ($\ln 2$), le grain portant lui-même un bit. C'est ainsi que se fait la transition $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{I}$.

3.3 La frontière logique : l'acte primordial de discernabilité

Toute structure peut être représentée comme une relation séparée par une **frontière**. À N_{-1} :

$$\boxed{\mathcal{A} \mid \mathcal{B}} \quad (16)$$

où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux domaines structurels et $\mid$ une interface qui sépare et connecte simultanément. Cette frontière est **logique** ; elle délimite une possibilité de distinction dans l'espace des structures, sans encore porter d'information au sens physique. Spencer-Brown [6] (*Laws of Form*) la formule : tout commence par l'acte de tracer une frontière. La frontière est la condition de possibilité de l'information, non l'information elle-même.

La frontière est traversée par une transformation réversible :

$$\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, \quad \varphi^{-1} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}, \quad \varphi^{-1} \circ \varphi = \text{id}_{\mathcal{A}} \quad (17)$$

Le Dit : unité logique élémentaire de N_{-1} . L'acte de distinction produit une entité précise :

$$\boxed{\text{Dit} := (\mathcal{A} \mid \mathcal{B}) \quad \text{avec} \quad \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset, \quad \mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{U}} \quad (18)$$

Le Dit n'est pas un bit : le bit est une unité d'*information* qui émerge à N_0 . Le Dit institue la différence dans l'espace logique pur ; le bit en est la représentation formelle à usage opérationnel dans la description des portes de ce niveau.

La frontière est la partition munie de son interface. La définition (18) appelle une précision, sans laquelle le Dit se réduirait à une partition ordinaire. Une partition seule ne porte que la *séparation* ; c'est φ qui porte la face « connecte » du même geste. Le Dit est donc le couple

$$\text{Dit} = (\mathcal{A}, \mathcal{B}, \varphi), \quad \varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \text{ réversible}, \quad (19)$$

et non la seule paire $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Cette précision a une conséquence utile : elle donne une définition *formelle* de la **semi-perméabilité**, notion jusqu'ici employée de façon qualitative (§2.3). Une frontière semi-perméable est une interface *partielle*, c'est-à-dire une φ définie sur un sous-domaine strict de $\mathcal{A}$:

$$\text{dom}(\varphi) \subsetneq \mathcal{A} \implies \underbrace{\text{dom}(\varphi)}_{\text{ce qui passe}} \sqcup \underbrace{\mathcal{A} \setminus \text{dom}(\varphi)}_{\text{ce qui est retenu}} = \mathcal{A}. \quad (20)$$

Ce qui traverse relève du domaine de φ ; ce qui est retenu relève de son complément. Les deux cas limites sont la frontière *transparente* ($\text{dom}(\varphi) = \mathcal{A}$) et la frontière *opaque* ($\text{dom}(\varphi) = \emptyset$), et l'on retrouve ainsi, comme extrêmes d'un même paramètre, les régimes $\equiv$ et $\neq$ décrits plus loin. Pour un système constitué, la partition reçoit une réponse précise : *passent* les flux externes des trois fonctions transactionnelles R , D et H ; est *retenue* la cohésion nouée par L , dont le flux externe est nul (§1.1.3, remarque 13).

Ordre ontologique : pourquoi le Dit précède le Bit. La distinction n'est pas terminologique : elle reflète un ordre ontologique strict. Le bit suppose un *support physique* capable de maintenir deux états distinguables au cours du temps : un dispositif (un spin, une charge, un photon), une métrique de stabilité, une énergie minimale d'effacement ($k_B T \ln 2$ [10]). Le lieu et le support appartiennent à N_0 ; la durée orientée et l'énergie d'effacement n'apparaissent qu'à partir de N_1 (l'article N_0 n'a pas d'énergie). Le Dit, en revanche, ne suppose rien de tel : il est la *possibilité même* d'une distinction, antérieure à tout support qui la porterait. Ce qui est primitif n'est pas l'état 0 ou 1, mais le fait qu'il existe une partition ($\mathcal{A}|\mathcal{B}$) où quelque chose peut se distinguer de quelque chose d'autre. L'encodage binaire $\{0,1\}$ est un choix de représentation (le plus économique) pour décrire opérationnellement des Dits, mais il vient *après* la distinction qu'il représente. En ce sens, le Dit est à N_{-1} ce que le bit sera à N_0 : l'unité élémentaire propre au niveau, dans son ontologie propre.

Pour le lecteur : distinction et bit

Prenons un interrupteur. Il est allumé ou éteint, et rien d'autre. C'est la plus petite chose qu'on puisse dire d'un objet : il est ceci, ou il est cela. On appelle cela une *distinction* : on trace une frontière, et chaque chose tombe d'un côté ou de l'autre (oui ou non, dedans ou dehors).

Pour l'écrire, on note un côté 0 et l'autre 1. Ce symbole à deux valeurs s'appelle un *bit*. À ce niveau, l'article parle plutôt de *Dit* : le Dit est la possibilité même de distinguer, le bit n'en est que l'écriture commode (il ne deviendra une information portée par un support qu'à N_0).

Prenons maintenant deux interrupteurs, A et B . Chacun a deux positions, donc on obtient $2 \times 2 = 4$ états : 00, 01, 10, 11 (le premier chiffre pour A , le second pour B). On peut les placer aux coins d'un carré, de sorte que deux coins voisins ne diffèrent que par un seul interrupteur (figure 5).

Pourquoi deux et pas un ? Avec un seul interrupteur, il n'y a que deux états, et on ne peut faire que deux choses : ne rien toucher, ou basculer. Basculer deux fois ramène au départ ; on va et on revient, sans plus. Pour qu'un parcours visite plusieurs états avant de revenir (faire un tour, et non un aller-retour), il faut plus de deux états, et avec des bits le nombre suivant est quatre. C'est pourquoi l'article travaille sur l'espace à deux bits : c'est le plus petit où un vrai tour est possible.

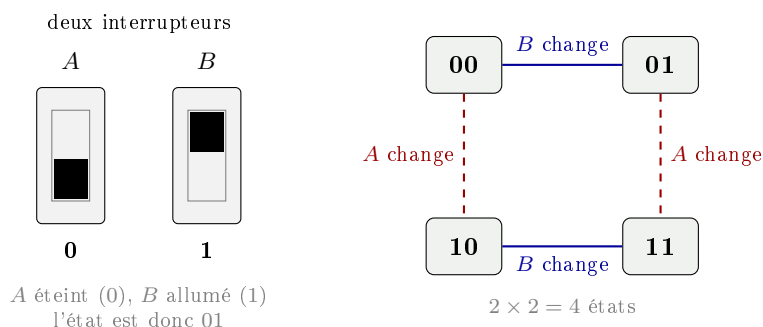


Figure 5: Deux interrupteurs donnent quatre états. À gauche, un état particulier (A éteint, B allumé, soit 01). À droite, les quatre états 00, 01, 10, 11 aux coins d'un carré : deux coins reliés par un côté ne diffèrent que par un seul interrupteur (trait plein : B change ; trait tireté : A change). Avec un seul interrupteur, on n'aurait que deux états et un simple aller-retour.

Pour le lecteur : le registre, ou garder une trace

Dans un ordinateur, un *registre* est une petite case de mémoire qui contient quelques bits. Garder la trace d'une distinction, c'est d'ordinaire l'écrire dans une telle case et compter sur le support (un aimant, une charge électrique) pour la conserver au cours du temps. Cela suppose un lieu, une durée et de l'énergie, donc des choses qui n'apparaissent qu'à partir de N_0 et de N_1 .

À N_{-1} , le mot garde son idée mais change de contenu. On part du Dit, la distinction la plus simple : un domaine A séparé d'un domaine B , que l'on note 0 ou 1. Deux Dits indépendants donnent quatre cas, 00, 01, 11, 10, comme deux interrupteurs donnent quatre positions. Le *registre* du substrat est cet ensemble de quatre configurations : deux bits en tout, pas plus. Un troisième bit porterait une distinction que rien n'exige, et le substrat n'en porte aucune sans fondement.

Comment ce registre garde-t-il la trace d'une distinction, sans support et sans durée ? Par la forme de ses opérations. Toutes sont réversibles : chaque case est envoyée sur une seule case, et deux cases différentes ne tombent jamais sur la même. On peut donc toujours retrouver d'où l'on vient. La boucle RDHL passe par les quatre cases et revient au départ (figure 6) ; aucune différence ne se perd en chemin, elle est seulement déplacée. La trace n'est pas conservée *dans le temps*, elle est conservée parce que rien n'est jamais confondu.

En une phrase : le registre de N_{-1} est l'ensemble des quatre configurations de deux bits, et il garde les distinctions parce que ses opérations n'en confondent aucune.

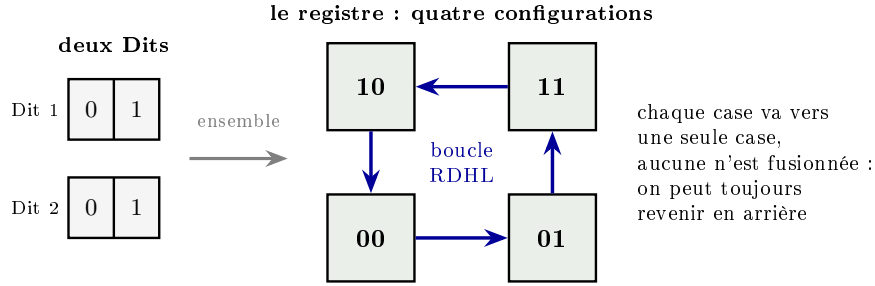


Figure 6: Le registre de N_{-1} . Deux Dits indépendants (à gauche) donnent quatre configurations (au centre), et pas davantage. Les opérations du substrat déplacent d'une case à l'autre sans jamais réunir deux cases en une : la boucle RDHL parcourt les quatre et revient au départ. C'est ainsi que les distinctions sont gardées, sans support ni durée.

Remarque 7 (Résonances avec la physique théorique). *Le théorème de Kochen-Specker [25] montre que certaines distinctions logiquement possibles ne peuvent être simultanément actualisées dans un support physique : N_{-1} capture l'espace de ces distinctions possibles ; N_0 en réalise une sélection cohérente. Les inégalités de Bell [26] sont compatibles avec l'idée que les frontières logiques de N_{-1} ont une structure non-locale qui ne se localise qu'après instanciation dans N_0 . Le principe holographique [27, 28] suggère que les frontières (au sens de N_{-1}) jouent un rôle fondateur. Ces parallèles sont des analogies structurelles, non des dérivations formelles.*

3.4 Les quatre régimes de frontière et leur ancrage dans les principes R, D, H, L

Les signes $\equiv$, $=$, $\neq$ et $\emptyset$ ne sont pas de simples notations : ils sont, à N_{-1} , les **opérateurs primitifs de la frontière**, les quatre manières fondamentales dont deux structures peuvent se situer l'une par rapport à l'autre.

Signe	Quantité	Qualité	Frontière	Principe
$\equiv$	identique	identique	copie distincte transparente	R
$=$	identique	distincte	partielle (transparente)	D
$\neq$	distincte	distincte	totale (opaque)	H
$\emptyset$	distincte	identique (émergente)	nulle (absorption)	L

3.4.1 Frontière de type R : le signe $\equiv$ et la reproduction de l'identique.

$A \equiv B$ signifie : deux entités distinctes, identiques en quantité *et* en qualité. La frontière existe (ce qui distingue A de B comme entités séparées), mais elle est de transparence maximale (aucun contenu ne les différencie).

$$A \equiv B \iff \begin{cases} A \text{ et } B \text{ distincts} & (\text{deux nœuds différents de } \mathcal{M}) \\ \forall P_q : P_q(A) = P_q(B) & (\text{même quantité}) \\ \forall P_k : P_k(A) = P_k(B) & (\text{même qualité}) \end{cases} \quad (21)$$

C'est le fondement logique de la Reproduction : la capacité d'être deux sans être différent. Physiquement : deux photons dans le même mode sont deux quanta distincts décrits par le même vecteur d'état ; deux brins d'ADN répliqués sont deux entités séparées à séquence identique ; deux bosons dans le même état sont $\equiv$ l'un à l'autre (d'où la statistique de Bose-Einstein). La discernabilité de cette frontière est minimale mais non nulle : la seule information potentielle est la cardinalité ("y en a-t-il un ou deux ?").

$$\mathcal{D}(A \equiv B) = \mathcal{D}_{\min} > 0 \quad (22)$$

3.4.2 Frontière de type D : le signe $=$ et la différenciation qualitative.

$A = B$ signifie : même quantité, qualités distinctes. La frontière est *transparente à la quantité* et *opaque à la qualité*.

$$A = B \iff \begin{cases} A \neq B & (\text{entités distinctes en qualité}) \\ Q(A) = Q(B) & (\text{même quantité}) \\ K(A) \neq K(B) & (\text{qualités distinctes}) \end{cases} \quad (23)$$

C'est la signature logique de la brisure de symétrie : quelque chose est conservé (la quantité) tandis que la structure qualitative se différencie. Exemples : $2 + 2 = 4$ (même valeur, structures qualitativement différentes) ; deux isomères (C_4H_{10} : même formule, structures distinctes) ; deux états dégénérés en mécanique quantique (même énergie, fonctions d'onde distinctes) ; la conservation de l'énergie ($E_{\text{cin}} + E_{\text{pot}} = \text{cste}$: même quantité totale, formes qualitativement différentes). Le théorème de Noether [24] relie chaque relation $=$ entre états d'un système à une symétrie conservée, la frontière D est une *frontière de type Noether*.

$$\mathcal{D}(A = B) = \log_2 \left(\frac{|\mathcal{M}|}{|\mathcal{M}_{=}|} \right) > 0 \quad (24)$$

3.4.3 Frontière de type H : le signe $\neq$ et la hiérarchisation.

$A \neq B$ signifie : distincts à la fois en quantité et en qualité. C'est le régime de frontière le plus fort, aucune propriété partagée.

$$A \neq B \iff \begin{cases} Q(A) \neq Q(B) & (\text{quantités distinctes}) \\ K(A) \neq K(B) & (\text{qualités distinctes}) \end{cases} \quad (25)$$

Un écart de rang, non le franchissement d'un palier. Comme les trois autres, ce régime se définit **entre deux entités d'un même niveau** : un proton et un électron diffèrent en quantité (leurs masses sont dans un rapport de près de deux mille) et en qualité (charge, rôle) ; la reine et l'ouvrière, dans une colonie, diffèrent de même en masse et en fonction. *C'est là ce que hiérarchiser veut dire* : instituer, parmi les éléments d'un système, des rangs qui ne partagent plus rien de commun. Le régime $\neq$ mesure donc un **écart de rang**, non un changement de palier.

Il décrit *a fortiori* la séparation entre deux niveaux déjà constitués, et c'est en ce sens dérivé que N_{-1} et N_0 , ou un électron et un atome, sont en relation $\neq$: les deux niveaux ne partagent ni leurs grandeurs caractéristiques ni leurs lois constitutives. Mais cette description est une *conséquence de l'intensité* du régime, non sa définition, et surtout elle ne dit rien de l'**acte** qui fait naître un niveau. Cet acte est le geste de L (§3.4.4) : on ne quitte pas un palier en portant la séparation à son comble, on le quitte en *refermant*. La maximalité de $\neq$ ordonne le *dedans* d'un système ; c'est $\emptyset$ qui en fait une *unité*, et c'est cette unité, non l'écart, qui devient l'élément du palier supérieur.

Le régime $\neq$ reste réversible à N_{-1} . À N_{-1} , aucune opération n'efface quoi que ce soit, faute de température et d'énergie (§3.6). La frontière $\neq$ y est donc simplement le *plus long trajet réversible* ($\delta = 3$), et non un franchissement coûteux. Le coût de Landauer [10] $k_B T \ln 2$ n'est **pas** une propriété du substrat : il n'apparaît qu'aux niveaux qui ont une énergie, à partir de N_1 , lorsqu'un *bit* (un Dit instancié dans un support physique) est effacé. L'article N_0 le rappelle : Landauer fait payer l'effacement, non le stockage, et le plancher d'un bit par face ne se convertit pas en énergie. *La frontière est logique à N_{-1} ; sa traversée ne devient coûteuse qu'une fois incarnée.*

$$\mathcal{D}(A \neq B) \geq \mathcal{D}(A = B) \geq \mathcal{D}(A \equiv B) > 0 \quad (26)$$

3.4.4 Frontière de type L : le signe $\emptyset$ et la Liaison.

Le quatrième régime est l'**ensemble vide** $\emptyset$: deux domaines fusionnent en une entité unique AB , irréductible à la somme de ses parties. La frontière L est de type *quantité distincte, qualité identique* : analogue inversé de D , mais en sens émergent : la qualité de AB est celle de ses composantes ($K(AB)$ est du même ordre que $K(A)$), tandis que la quantité diffère irréductiblement :

$$L : (A, B) \mapsto AB \quad \text{tel que} \quad K(AB) \not\supseteq K(A) \cup K(B) \quad \text{et} \quad Q(AB) \neq Q(A) + Q(B) \quad (27)$$

Exemples : l'intrication quantique $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ n'est pas décomposable en produit tensoriel de deux états individuels ; la liaison covalente H_2 produit une entité aux propriétés irréductibles aux atomes séparés ; la condensation de Bose-Einstein fond les bosons en une seule fonction d'onde macroscopique.

La Liaison est l'inverse logique de la Différenciation : là où D part d'une unité pour produire une diversité qualitative (brisure de symétrie), L part d'une multiplicité pour produire une unité qualitativement nouvelle (émergence de cohérence).

Deux précisions sont nécessaires :

(i) **La discernabilité de l'opérateur L est nulle** : $\mathcal{V}(g^4) = 0$ (aucune configuration ne change ; cf. tableau 9). L'opérateur L ne *consomme* aucun potentiel de distinction, c'est le coût de franchissement de frontière qui est nul, non la discernabilité entre les entités impliquées.

$$\mathcal{V}(L) = \frac{1}{4} \sum_s d_H(s, g^4(s)) = 0 \quad (28)$$

(ii) **La discernabilité entre A et AB est non nulle** : AB possède un caractère émergent irréductible, $\mathcal{K}(AB) \not\supseteq \mathcal{K}(A) \cup \mathcal{K}(B)$ et $\mathcal{Q}(AB) \neq \mathcal{Q}(A) + \mathcal{Q}(B)$. Un élément seul n'est pas identique à la fusion de deux éléments, même si $A = B$: la quantité a changé, les propriétés émergentes apparaissent. La frontière L est de type = (même qualité, quantité distincte) entre A et AB :

$$\mathcal{D}(A, AB) > 0 \quad (\text{même qualité émergente, quantité distincte}) \quad (29)$$

AB peut donc posséder une discernabilité très élevée vis-à-vis des autres entités de $\mathcal{M}$, ce qui est la signature de l'émergence : la fusion crée une entité plus discernable que ses composantes.

C'est ici, et ici seulement, qu'est la signature de l'émergence. Le point mérite d'être énoncé sans ambiguïté, car il départage les quatre régimes. Un niveau nouveau ne naît pas d'une séparation portée à son comble (le régime $\neq$, §3.4.3), mais d'une **fermeture** : c'est en liant que la multiplicité devient une unité, et cette unité est l'élément du palier supérieur. Les deux régimes forts se partagent ainsi le travail : $\neq$ ordonne le *dedans* d'un système en y instituant des rangs, tandis que $\emptyset$ en fait une *unité*. Cette lecture n'est pas un ajout interprétatif : elle est exigée par le mécanisme de transition établi plus loin, $Nf_{x.4} = Nf_{x+1.0}$ (§7.9), où c'est la *quatrième* fonction, la clôture, qui est numériquement identique à la fonction d'ouverture du niveau suivant. La fermeture d'un palier *est* l'ouverture du palier suivant, et c'est L qui referme.

3.4.5 Les quatre régimes comme fondement logique des principes R , D , H , L .

$R \leftrightarrow \equiv$	(même quantité et qualité, entités distinctes)	(30)
$D \leftrightarrow =$	(même quantité, qualités distinctes)	
$H \leftrightarrow \neq$	(quantités et qualités distinctes)	
$L \leftrightarrow \emptyset$	(quantité distincte, qualité émergente identique)	

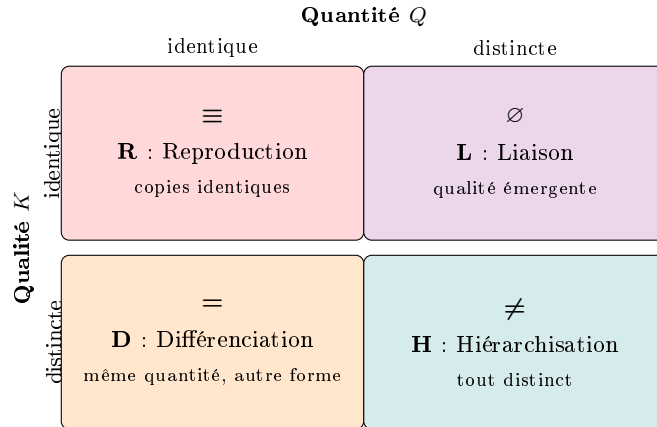


Figure 7: Le carré logique des quatre frontières. Les deux axes *quantité* et *qualité* (identique / distincte) engendrent exactement quatre régimes de discernabilité : $\equiv$ (R), $=$ (D), $\neq$ (H) et $\emptyset$ (L). C'est le fondement des quatre opérateurs de $\mathbb{Z}_4$.

Un système $\mathcal{S}$ est durable s'il maintient simultanément ces quatre types de relations :

$$\mathcal{D}(\mathcal{S}) > 0 \iff \underbrace{\mathcal{S} \equiv \mathcal{S}'}_{\text{reproduction (R)}} \quad \text{et} \quad \underbrace{\mathcal{S} = \mathcal{E}}_{\text{équilibre (D)}} \quad \text{et} \quad \underbrace{\mathcal{S} \neq N_{\pm}}_{\text{intégrité (H)}} \quad \text{et} \quad \underbrace{\mathcal{S} \supset AB}_{\text{cohésion (L)}} \quad (31)$$

où $\mathcal{S}'$ est une copie, $\mathcal{E}$ l'environnement, $N_{\pm}$ les niveaux adjacents, AB une entité interne liée.

Les quatre régimes (figure 7) s'ordonnent selon un gradient croissant de discernabilité ($\equiv < = < \neq$), L sortant de cette hiérarchie comme suppression de la distinction :

$$\underbrace{L}_{\text{fusion (unité)}} \longleftarrow \underbrace{\equiv}_{\text{copies identiques}} \longrightarrow \underbrace{=}_{\text{même quantité qualités distinctes}} \longrightarrow \underbrace{\neq}_{\text{tout distinct (niveaux)}} \quad (32)$$

3.5 Les quatre opérateurs fondamentaux : préfigurations algébriques à N_{-1}

Des frontières statiques aux opérateurs dynamiques. La section précédente a caractérisé les quatre régimes de frontière ($\equiv, =, \neq, \emptyset$) comme les quatre manières fondamentales dont deux structures peuvent se situer l'une par rapport à l'autre. Ces régimes sont *statiques* : ils décrivent un état relationnel, pas une transformation. La présente section opère le passage complémentaire : à chaque régime de frontière correspond un **opérateur dynamique**, une transformation qui *produit* cette frontière. Là où la section 3.4 caractérisait les frontières comme empreintes relationnelles, celle-ci caractérise les opérateurs comme les morphismes qui les engendrent. C'est l'articulation duale fondamentale du substrat N_{-1} : *être en relation* (frontière) et *transformer* (opérateur) sont les deux faces de la même structure logique.

À N_{-1} , les quatre transformations (R, D, H, L) sont des opérateurs purement logiques et algébriques, leur **structure formelle** est établie ici ; leur identité sémantique pleine se réalise aux niveaux supérieurs. Chaque opérateur relève d'une *catégorie algébrique* dont la propriété distinctive code la fonction qu'il préfigure, et détermine du même coup la frontière qu'il engendre.

R , morphisme structural, préserve la composition ($R(a \star b) = R(a) \star' R(b)$) : l'image maintient la structure interne de l'original, d'où la correspondance avec $\equiv$. Son orientation, en algèbre pure, est celle du morphisme, de la source vers l'image, sans réciproque immédiat.

D , brisure de symétrie, partitionne une structure homogène en sous-structures dont les groupes de symétrie sont des sous-groupes propres, $\mathcal{A}^G \mapsto \{\mathcal{A}_i^{G_i}\}$ avec $G_i \subsetneq G$, l'indice $[G : G_i]$ mesurant le degré de différenciation. L'opération conserve un invariant, celui du sous-groupe maintenu, tout en diversifiant le reste : c'est exactement la relation $=$ (même quantité, qualités distinctes). Par le théorème de Noether [24], sélectionner le sous-groupe conservé, c'est sélectionner ce qui sera conservé dans la transformation. Algébriquement D est involutif ($D^2 = L$), et cette involutivité est la signature de la réciprocité — *externe* maximale pour D , purement *interne* pour L , dont le flux externe est nul.

H , relation d'ordre et foncteur, équipe $\mathcal{M}$ d'un poset (comparaison antisymétrique et transitive, qui institue la verticalité) et projette une catégorie dans une catégorie de niveau supérieur en préservant la composition. Deux niveaux ne partageant ni objets ni morphismes, la frontière engendrée est $\neq$. Algébriquement, $H = R^{-1}$: le flux entrant est l'inverse formel du flux sortant. À N_{-1} , g^1 et g^3 sont interchangeables par l'automorphisme d'inversion $g \mapsto g^{-1}$ et indiscernables par tout invariant *symétrique* ; seule la primitive orientée δ les distingue (§3.2), et c'est N_1 qui *ré-imposera* laquelle des deux orientations compte comme R .

L , produit tensoriel, combine deux structures en une nouvelle qui ne se réduit pas à leur produit cartésien : $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ contient ce qui n'est ni dans l'une ni dans l'autre ni dans leur union, et l'information mutuelle $\mathcal{I}(\mathcal{A}; \mathcal{B})$ mesure ce surcroît. C'est la signature algébrique de l'émergence. Algébriquement $L = g^4 = e$: aucune configuration ne change, et cette apparente trivialité *est* le sens de la Liaison — ce qui distingue un système lié n'est pas une transformation de ses éléments mais l'établissement d'une relation entre eux. L'intrication [26], la liaison covalente, la condensation de Bose-Einstein en sont des réalisations physiques.

Synthèse : opérateur, catégorie, frontière. La correspondance complète entre les quatre opérateurs, leurs catégories algébriques d'appartenance, et les frontières qu'ils engendrent se résume comme suit :

Opérateur	Catégorie algébrique	Propriété distinctive	Frontière engendrée
R	Morphisme structural	Préserve la composition	$\equiv$
D	Brisure de symétrie	Involution $D^2 = L$	$=$
H	Foncteur, relation d'ordre	$H = R^{-1}$	$\neq$
L	Produit tensoriel	Identité $L = e$	$\emptyset$

Cette table articule trois plans en une seule structure : les *opérations* (ce que l'opérateur fait), les *propriétés algébriques* (ce qui le caractérise formellement), et les *frontières* (l'empreinte relationnelle qu'il laisse). Chaque colonne est dérivable des deux autres : connaissant deux des trois, le troisième est entièrement déterminé. C'est cette triple cohérence qui justifie l'identification des quatre opérateurs de $\mathbb{Z}_4$ aux quatre fonctions fondamentales du programme microGlobal.

Remarque 8 (Propriétés démontrées et gloses interprétatives). *La table ci-dessus mêle deux plans qu'il vaut mieux ne pas confondre. La colonne des **propriétés distinctives** est un théorème : être le générateur, être une involution non triviale, être l'inverse du générateur, être l'identité — ces quatre propriétés caractérisent sans reste les quatre éléments de $\mathbb{Z}_4$ et déterminent la frontière associée. La colonne des **catégories algébriques**, en revanche, ne se déduit pas de l'algèbre : « H est un foncteur », « L est un produit tensoriel » sont des lectures plaquées sur des éléments de groupe qui, en eux-mêmes, sont tous de même espèce, à savoir des puissances de g . On les conserve pour leur valeur heuristique et parce qu'elles orientent la lecture des niveaux supérieurs, sans leur prêter la nécessité de la colonne précédente.*

Les deux axes, et leur asymétrie de statut. Une partition plus profonde que la liste des quatre éléments les organise en **deux axes**, les deux diagonales du cycle. Mais ces deux axes n'ont pas le même statut algébrique, et le fait mérite d'être relevé car il est rarement remarqué :

- L'axe $L-D$ réunit l'identité ($L = e$) et l'involution ($D^2 = e$). C'est *exactement l'unique sous-groupe d'ordre 2* de $\mathbb{Z}_4$, à savoir $\{e, g^2\}$, l'ensemble des éléments d'ordre ≤ 2 : il est **clos** par composition. C'est le couple *involutif*, qui ne fait pas avancer le cycle mais revient sur lui-même.
- L'axe $R-H$ réunit le générateur g et son inverse $g^3 = R^{-1}$, tous deux d'ordre 4. Cet axe **n'est pas un sous-groupe** : il n'est pas clos, puisque $R \circ H = g g^3 = e \notin \{R, H\}$. C'est le *coset des générateurs*, le couple *directionnel*, celui qui fait tourner la boucle.

Les deux axes ne sont donc pas deux copies symétriques de $\mathbb{Z}_2$: **un seul des deux est un sous-groupe**. Cette asymétrie n'est pas une curiosité : elle explique pourquoi les deux seules identités d'appariement retombent sur g^1 et g^3 , c'est-à-dire sur l'axe directionnel et jamais sur l'axe involutif (§7.4) ; pourquoi R et H , et eux seuls, portent l'orientation que le verrou achiral interdit de fixer à N_{-1} (théorème 5), l'axe $L-D$ étant invariant sous l'inversion $g \mapsto g^{-1}$ qui échange R et H ; et pourquoi l'appariement $RH = DL$, qu'on pourrait croire admissible par symétrie, est *faux* ($RH = g^4 = e$ tandis que $DL = g^2 \neq e$). Seules les fonctions *adjacentes*, une de chaque axe, produisent une égalité.

3.5.1 Non-commutativité : des primitives, non des éléments de $\mathbb{Z}_4$

Remarque 9 (Précision essentielle). $\mathbb{Z}_4$ est un groupe abélien : ses éléments g^1, g^2, g^3, g^4 commutent tous ($g^i \circ g^j = g^{i+j} = g^j \circ g^i$). La non-commutativité pertinente à N_{-1} ne porte pas sur ces éléments, mais sur les **opérations primitives NOT et XOR** de $N_{s-1,1}$ dont ils sont composés.

Les primitives NOT_{b_0} (un basculement) et $\text{XOR}(b_1, b_0)$ (une opération conditionnelle, ou OU exclusif, qui lit b_0 et écrit sur b_1 ; c'est XOR_{01} dans la convention de l'article N_0) ne commutent pas :

$$\text{NOT}_{b_0} \circ \text{XOR}(b_1, b_0) \neq \text{XOR}(b_1, b_0) \circ \text{NOT}_{b_0} \quad (33)$$

Vérification sur $(b_1, b_0) = (0, 1)$: LHS = $\text{NOT}_{b_0}(1, 1) = (1, 0)$; RHS = $\text{XOR}(0, 0) = (0, 0)$: non-commutation.

C'est un **invariant structural** de N_{-1} : nécessaire à l'universalité du calcul réversible sur $\{0, 1\}^2$. Sa projection à N_0 , par l'enveloppe linéaire des permutations, donne l'algèbre $\mathfrak{so}(3) \cong \mathfrak{su}(2)$: les commutateurs d'un basculement et des deux opérations conditionnelles (une dans chaque sens) en sont les trois générateurs. Ce n'est pas l'image de $\mathbb{Z}_4$, qui reste commutative. L'incertitude y apparaît sans constante de Planck (le canal et le volume d'un grain ne commutent pas), et $\hbar$ ne fera que lui donner une échelle, par un étalonnage. Le développement formel figure en Annexe D.

À quelle échelle cet invariant se manifeste-t-il ? La précision importe, car elle circonscrit la portée de la thèse. Sur le seul espace à **deux bits**, la non-commutation des primitives suffit déjà. L'article N_0 établit que les commutateurs d'un basculement et des deux opérations conditionnelles engendrent $\mathfrak{su}(2)$, de dimension trois, et qu'un troisième bit donnerait $\mathfrak{so}(7)$, que la minimalité exclut. Le noyau $\mathbb{Z}_4$ lui-même reste abélien : la non-commutativité ne vient pas de lui, mais des primitives dont ses éléments sont composés. L'universalité du calcul réversible est une autre affaire. Elle exige la porte de Toffoli [7] (CCNOT), qui ne vit pas sur les deux bits du noyau mais au palier $N_{s-1,3}$, celui de la double conditionnalité (annexe F).

La division du travail est donc la suivante : le noyau $\mathbb{Z}_4$ fonde la boucle ; la non-commutation des primitives, sur deux bits, fonde la géométrie de N_0 et la phase $\pm i$ de N_1 ; l'universalité calculatoire émerge du déploiement. À l'objection « votre groupe est abélien, d'où tirez-vous une non-commutativité ? », la réponse est qu'on ne la tire pas de lui, mais des primitives.

3.6 Le calcul réversible : principes et fondements

À N_{-1} , aucune distinction ne peut être créée ni détruite, ce qui impose que toute opération soit une bijection :

$$f \in \text{Sym}(2^n) \iff f \text{ est une bijection de } \{0, 1\}^n \quad (34)$$

En physique, Landauer [10] a montré qu'effacer un bit dissipe $k_B T \ln 2$, et Bennett [9, 11] qu'on peut au contraire calculer sans rien effacer : la réversibilité y est un *choix d'ingénierie*, coûteux à négliger. À N_{-1} , elle n'est pas un choix mais une **nécessité**. Encore faut-il en donner la bonne raison, car l'argument tentant (« il n'y a pas d'énergie à N_{-1} , donc pas d'effacement ») ne tient pas.

Pour le lecteur : basculer ou effacer

Un interrupteur a deux positions, allumé et éteint. Le basculer est une opération *réversible* : si je connais la position après, je connais la position avant, et un second basculement remet tout en place. Effacer un tableau noir est une opération *irréversible* : quoi qu'il y ait eu d'écrit, on obtient le même tableau vide, et rien ne permet de retrouver l'écriture. Deux états de départ différents arrivent sur un seul état d'arrivée (figure 8).

Où est passée la différence entre les deux écritures ? Elle est partie au dehors, dans l'éponge, la poussière de craie, l'air un peu réchauffé. Le physicien Rolf Landauer a montré en 1961 qu'effacer un bit (une information du type oui ou non) rejette au moins $k_B T \ln 2$ d'énergie sous forme de chaleur dans l'environnement, où T est la température et k_B une constante. À la température d'une pièce (300 K), cela fait environ $2,9 \times 10^{-21}$ joule par bit.

À N_{-1} il n'y a ni énergie ni température, et la formule de Landauer n'y dit rien (si l'on posait $T = 0$, elle autoriserait même d'effacer gratuitement). La raison de la réversibilité est donc ailleurs. Effacer, c'est toujours verser une distinction dans un extérieur. Or le substrat est le tout : il n'a pas d'extérieur où la verser. Une distinction ne peut donc y être perdue, seulement transformée, et toutes les opérations y sont des basculements. Landauer n'intervient qu'au passage de N_0 à N_1 , quand la logique s'installe dans un support qui a une température.

En une phrase : à N_{-1} rien ne s'efface, parce qu'il n'y a aucun dehors où rejeter la différence.

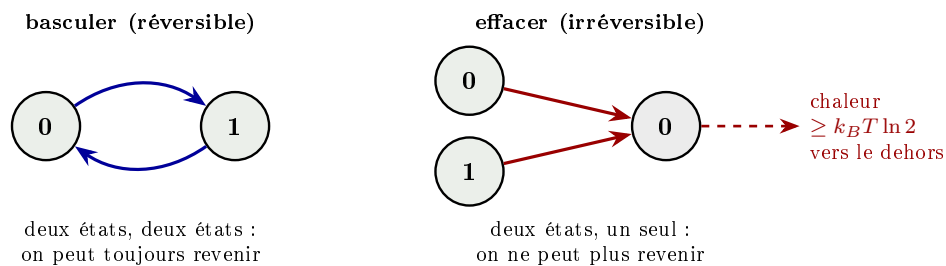


Figure 8: Basculer et effacer. À gauche, chaque état a un seul successeur et un seul prédécesseur : l'opération se défait. À droite, deux états tombent sur un seul, et la différence perdue part dans l'environnement sous forme de chaleur (principe de Landauer). Le substrat N_{-1} , qui n'a pas de dehors, n'admet que des opérations du premier type.

Une objection à traiter : Landauer ne prouve rien à $T = 0$

Le coût de Landauer vaut $k_B T \ln 2$; or à N_{-1} il n'y a ni énergie ni température. À $T = 0$, cette borne **s'annule** : loin d'interdire l'effacement, Landauer l'autoriserait *gratuitement*. L'invoquer pour *fonder* la réversibilité du substrat serait donc un cercle, et même une faute de catégorie : importer la thermodynamique dans un niveau qui la précède.

Le fondement retenu est structurel, non thermodynamique : N_{-1} n'a pas d'extérieur. Effacer, en effet, n'est jamais détruire *sur place* : c'est *exporter* une distinction vers un environnement, la transférer aux degrés de liberté d'un bain, et $k_B T \ln 2$ mesure précisément le prix de ce transfert. Mais le substrat est le tout : nul dehors où verser quoi que ce soit, nul bain, nul réservoir. Une distinction ne peut donc y être *perdue*, seulement transformée. D'où la bijection, non comme une contrainte imposée du dehors, mais comme *la seule opération possible dans un monde sans dehors*.

Le rôle exact de Landauer. Il ne fonde pas la réversibilité ; il marque le *prix de l'incarnation*, c'est-à-dire le moment où perdre une distinction *commence* à coûter : quand le Dit devient Bit, quand la logique s'instancie dans un support qui, lui, a une température. C'est pourquoi $k_B T$ figure sur la transition $N_0 \rightarrow N_1$ (information $\rightarrow$ énergie, table 1) et non au fondement du substrat. *Témoin à la frontière, non fondement du niveau.*

Et la discernabilité résiduelle ? On objectera que $\mathcal{D}_0 > 0$ (§8.2) réintroduit par la fenêtre l'énergie qu'on vient de refuser par la porte, et avec elle une température. Il n'en est rien, et c'est *la même* raison qui vaut : $\mathcal{D}_0$ n'est pas une énergie, c'est un résidu **structurel**, qui procède de l'absence de point fixe des générateurs et de la boucle nette $\sigma = g^2 \neq e$, non d'une agitation. Le substrat ne « crépète » pas thermiquement : il *ne se referme pas exactement*. Inquiétude logique, non thermique ; nul bain, nulle statistique, nul ensemble, c'est-à-dire aucune des conditions qui *définissent* T .

Le modèle est contraint à cette position. Donner à N_{-1} une température $T > 0$ exigerait de l'énergie, laquelle n'émerge qu'à N_1 : contradiction avec la stratification. Poser $T = 0$ et fonder sur Landauer annulerait la borne, autorisant l'effacement gratuit, donc la destruction de la discernabilité : contradiction avec la conservation. Reste la seule voie cohérente : *T n'est pas définie à N_{-1} , et la réversibilité y tient à une raison logique.*

3.7 Les portes logiques réversibles fondamentales

Les quatre opérateurs comme groupe algébrique. Les quatre opérateurs doivent être incarnés dans des **opérations logiques précises et algébriquement cohérentes** [13, 14] : ils forment les éléments d'un **groupe algébrique** dont la structure contraint le choix de chaque porte.

La contrainte de réversibilité impose d'opérer sur un espace minimal à deux bits (quatre états $\{00, 01, 10, 11\}$) l'espace le plus simple permettant d'exprimer distinction, polarité, transition et identité.

Remarque 10 (Du Dit à l'espace $\{0, 1\}^2$). *Le Dit est une partition $(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ de $\mathcal{U}$ en deux domaines complémentaires, une distinction, non un objet encodé. Pour définir des opérateurs sur ces distinctions, il faut un espace sur lequel ceux-ci agissent : on représente chaque Dit par un symbole binaire $\{0, 1\}$ (choix canonique minimal : deux symboles distincts pour deux domaines).*

Deux Dits indépendants produisent quatre états possibles : $\{00, 01, 10, 11\}$. Le passage n'est pas arbitraire : deux Dits sont le minimum pour que les quatre opérateurs soient simultanément représentables (voir Proposition 5 ci-après). Un seul Dit ne permet que deux opérateurs distincts (identité et NOT) ; trois Dits ou plus introduisent des degrés de liberté supplémentaires non contraints par la réversibilité seule.

3.7.1 L'espace logique à deux bits : quatre configurations, quatre opérateurs.

Les éléments $\{00, 01, 10, 11\}$ sont des **configurations logiques**, points du substrat sur lesquels les opérateurs agissent. Les opérateurs R, D, H, L sont des **flux et des transactions**, des permutations, non des éléments du substrat. Les quatre configurations s'interprètent comme degrés d'homogénéité :

- $|00\rangle$: homogène basse ; $|01\rangle$: mixte orientée ; $|10\rangle$: mixte inversée ; $|11\rangle$: homogène haute.

LECTURE TRANSVERSALE — statut : en discussion

Ce qui suit renvoie à la *note de référence*, partie III : c'est une lecture transversale, *non un acquis*. Un énoncé de cet article ne doit pas s'en servir comme *prémisse* — il peut la citer.

Le critère C1 est un milieu, non seulement un minimum. Un bit par pas se situe entre changer *aucun* bit et les changer *tous* — et ces deux bords ne sont pas coûteux : **ils sont impossibles**.

poids 0	$x \rightarrow x$: on ne quitte pas l'état. <i>Aucun cycle, donc aucun objet</i>
poids 2	chaque état n'a qu'un seul successeur, son antipode : $00 \rightarrow 11 \rightarrow 00$ ne visite que deux états sur quatre. Un cycle de quatre états à poids 2 partout n'existe pas
poids 1	exactement deux cycles : <i>RDHL</i> et <i>RLHD</i>

Le milieu n'est donc pas un optimum sur une courbe : c'est le seul point admissible, et il se trouve être au milieu. *C'est la forme la plus pure d'un principe que le corpus emploie aussi à N_0 , N_2 et N_3 — et c'est ici qu'elle est la plus nette, les deux bords n'y coûtant pas, mais n'existant pas.*

Le critère C1 n'en dépend en rien : il est établi par ses propres moyens, et cette lecture ne fait que le rattacher.

Proposition 5 (Minimalité de $\{0,1\}^2$). $\{0,1\}^2$ est le plus petit espace sur lequel quatre opérateurs réversibles distincts, formant un groupe cyclique d'ordre 4 et satisfaisant C1 (code de Gray), peuvent simultanément être définis.

Démonstration.

- (i) $n = 1$ **est insuffisant**. Sur $\{0,1\}^1$, $|\text{Sym}(\{0,1\})| = 2$: seules l'identité e et NOT existent. Il est impossible de définir 4 opérateurs distincts, a fortiori un groupe d'ordre 4.
- (ii) $n = 2$ **est suffisant**. Sur $\{0,1\}^2$, $|\text{Sym}(\{0,1\}^2)| = 24$: les 4-cycles existent. Les six 4-cycles se réduisent à deux (orbites (1) et (3)) sous le seul critère C1, formant $\mathbb{Z}_4$ avec le profil de points fixes (0,0,0,4) (lequel, comme la symétrie axiale de g^2 , est une conséquence de C1 ; Proposition 7).
- (iii) $n \geq 3$ **introduit une redondance non contrainte**. Sur $\{0,1\}^n$ pour $n \geq 3$, les opérateurs g^k peuvent être définis comme extensions triviales des portes à 2 bits (agissant sur les deux premiers bits et laissant les autres fixes). Mais des bits supplémentaires introduisent des degrés de liberté non déterminés par le critère C1 : ils n'ajoutent aucune structure nouvelle à $\mathbb{Z}_4$ et nécessitent des hypothèses supplémentaires hors de N_{-1} pour être contraints. L'espace minimal suffisant est donc $n = 2$.

La minimalité de $\{0,1\}^2$ est ainsi une conséquence du critère C1 combiné à l'exigence de former un groupe d'ordre 4 ; elle n'est pas postulée. $\square$

Vérification, script `verif_Nm1.py`, bloc A. La chaîne fidélité $\rightarrow$ binarité $\rightarrow$ minimalité (celle du théorème de saturation de l'article N_0) est recalculée : $n = 1$ donne $2 < 4$ configurations, $n = 2$ en donne exactement 4, $n = 3$ en donnerait 8 et ne serait pas minimal. $\square$

Il existe $4! = 24$ portes réversibles sur cet espace.

Pour le lecteur : permutations et cycles

Prenez quatre cartes posées en ligne. De combien de façons peut-on les ranger ? Pour la première place, on a 4 choix ; pour la deuxième, il reste 3 cartes ; puis 2 ; la dernière va d'office à la dernière place. Cela fait

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \text{ façons}$$

(on note ce produit $4!$, « factorielle 4 »). Chaque rangement s'appelle une *permutation*.

Les quatre états 00, 01, 10, 11 jouent le rôle des cartes. Une porte réversible est une règle qui envoie chaque état sur un état, sans que deux états arrivent au même endroit : rien ne se perd, et l'on peut toujours revenir en arrière. Une telle règle est un réordonnement des quatre cartes ; il y en a donc 24.

Parmi ces 24 règles, certaines sont des *cycles* : en répétant la règle, on passe par les quatre états, un par un, avant de revenir au départ, comme dans une ronde. Combien y en a-t-il ? On part toujours de 00 (l'endroit où l'on entre dans la ronde ne change rien, seul l'ordre compte). Il reste à choisir le deuxième état (3 choix), puis le troisième (2 choix) ; le quatrième est imposé, et l'on revient à 00. Cela fait $3 \times 2 \times 1 = 6$ cycles.

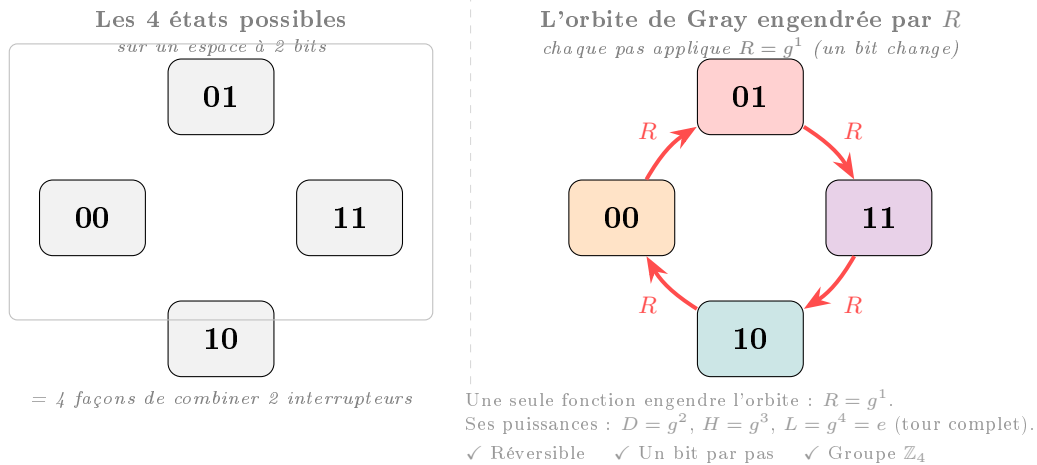
Ces six cycles vont par paires, car chaque ronde peut être parcourue dans un sens ou dans l'autre : ce sont les trois paires du tableau qui suit. Donc, sur quatre états, il y a 24 façons de tout réordonner, mais seulement 6 rondes qui passent par tous les états.

La structure cyclique de $\mathbb{Z}_4$ s'exprime par les puissances successives du générateur $g^1 = R$:

$$R \circ R = D, \quad R \circ D = H, \quad R \circ H = L, \quad D \circ D = L \quad (35)$$

ce qui définit un **groupe cyclique** $\mathbb{Z}_4$, non un groupe de Klein. La table de Cayley complète figure au §3.7. La différence est essentielle : $\mathbb{Z}_4$ possède un **ordre** et deux **orientations**, portées par ses deux générateurs g et g^{-1} , sans que l'une soit privilégiée (on fixe g par convention) :

$$g^1 = R, \quad g^2 = D, \quad g^3 = H, \quad g^4 = L = e \quad (36)$$



Parmi les $4! = 24$ permutations possibles, $\{RDHL, RLHD\}$ est l'unique paire de 4-cycles satisfaisant le critère C1 (code de Gray).

Figure 9: L'espace logique à deux bits et l'orbite de Gray. À gauche : les quatre **configurations** $\{00, 01, 10, 11\}$ forment l'espace minimal permettant d'exprimer distinction, polarité, transition et identité. À droite : l'**orbite topologique**, engendrée en appliquant le seul générateur $R = g^1$ (un bit change par pas, critère C1) ; les opérateurs D, H, L en sont les puissances g^2, g^3, g^4 , et non quatre arêtes distinctes de l'orbite. Le nom « RDHL » désigne la séquence ordonnée des quatre opérateurs, dont la composition $\sigma = g^2$ est la **fermeture dynamique** (ordre 2), à distinguer de l'orbite tracée ici (§5.1) ; la parcourir en sens inverse donne RLHD. La symétrie axiale de g^2 et le profil de points fixes $(0, 0, 0, 4)$ sont des conséquences automatiques de C1 (Invariants B.I et B.III).

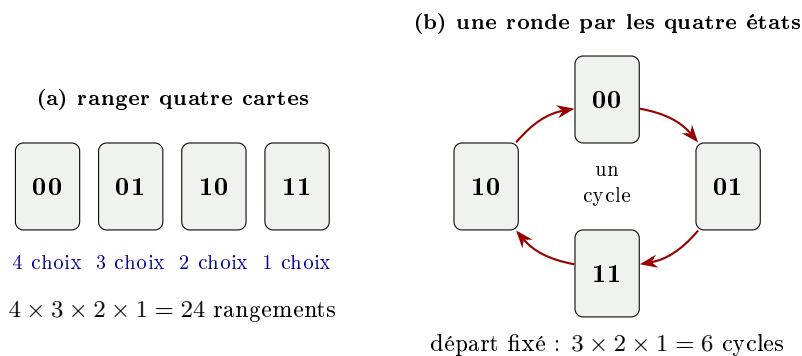


Figure 10: (a) Quatre cartes (les quatre états) se rangent de $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ façons : ce sont les 24 portes réversibles. (b) Un exemple de cycle : $00 \rightarrow 01 \rightarrow 11 \rightarrow 10 \rightarrow 00$. En partant toujours de 00, on choisit le deuxième état (3 choix), puis le troisième (2 choix), le dernier est imposé : il y a 6 cycles, soit trois paires parcourues en sens contraires.

Les six générateurs possibles et le critère de sélection. Un générateur de $\mathbb{Z}_4$ est un 4-cycle ; il en existe $(4 - 1)! = 6$ dans $\mathfrak{S}_4$, formant trois paires inverses :

Un *unique* critère sélectionne les générateurs (1) et (3) :

C1 : Code de Gray : un seul bit change à chaque pas (progression minimale) ; les quatre autres générateurs font sauter deux bits. Sur $\{0, 1\}^2$, le graphe d'adjacence de Hamming-1 est l'unique 4-cycle $00-01-11-10$: un 4-cycle à transition unitaire ne peut donc que parcourir ce carré, dans l'un de ses deux sens. C1 détermine ainsi $\{(1), (3)\}$ à lui seul, faisant tomber les vingt-quatre permutations à six 4-cycles, puis à deux.

Pour le lecteur : code de Gray et distance de Hamming

Comptons en binaire avec deux bits : 00, 01, 10, 11. Au passage de 01 à 10, les deux bits changent d'un coup. Or une machine qui lit ces bits ne les lit jamais exactement au même instant. Si elle tombe au milieu du changement, elle peut lire 00 ou 11 : une valeur fausse. C'est le problème du compteur kilométrique : de 0999 à 1000, quatre roues tournent ensemble, et une lecture prise au mauvais moment peut donner 1999 ou 0000.

Le *code de Gray* évite cela en rangeant les mêmes états autrement : 00, 01, 11, 10, puis retour à 00. À chaque pas, un seul bit change. Une lecture prise pendant le changement donne l'ancienne valeur ou la nouvelle, jamais une valeur fausse. C'est pourquoi les roues codeuses (un disque gravé qui indique la position d'un

#	Orbite de g	g^2 (type)	Code de Gray	Rôle
(1)	$00 \rightarrow 01 \rightarrow 11 \rightarrow 10 \rightarrow 00$	$00 \leftrightarrow 11, 01 \leftrightarrow 10$ (axial)	oui	cycle complexité
(3)	$00 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 01 \rightarrow 00$	$00 \leftrightarrow 11, 01 \leftrightarrow 10$ (axial)	oui	cycle entropie
(2)	$00 \rightarrow 01 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 00$	$00 \leftrightarrow 10, 01 \leftrightarrow 11$ (diagonal)	non	symétrie diagonale
(6)	$00 \rightarrow 11 \rightarrow 10 \rightarrow 01 \rightarrow 00$	idem(2)	non	inverse de (2)
(4)	$00 \rightarrow 10 \rightarrow 01 \rightarrow 11 \rightarrow 00$	$00 \leftrightarrow 01, 10 \leftrightarrow 11$ (diagonal)	non	symétrie diagonale
(5)	$00 \rightarrow 11 \rightarrow 01 \rightarrow 10 \rightarrow 00$	idem(4)	non	inverse de (4)

Table 2: Les six générateurs de $\mathbb{Z}_4$ sur $\{00, 01, 10, 11\}$. Paires inverses : $((1), (3)), ((2), (6)), ((4), (5))$.

axe, d'un bouton de réglage) utilisent ce code.

Pour mesurer l'écart entre deux états, on compte les bits qui diffèrent : c'est la *distance de Hamming*. Ainsi $d(01, 11) = 1$ et $d(01, 10) = 2$.

Reprenons les six cycles et notons la distance de chaque pas (figure 11). Quatre cycles alternent des pas de 1 et de 2 (total 6). Deux seulement n'ont que des pas de 1 (total 4) : ce sont les deux codes de Gray, et ils font le même tour du carré, l'un dans un sens, l'autre dans le sens contraire. Exiger qu'un seul bit change à chaque pas (c'est le critère C1) fait donc tomber les six cycles à deux, qui sont une même boucle parcourue dans ses deux sens.

cycle	parcours (distance de Hamming de chaque pas)								total	
(1)	00	$\xrightarrow{1}$	01	$\xrightarrow{1}$	11	$\xrightarrow{1}$	10	$\xrightarrow{1}$	00	4
(3)	00	$\xrightarrow{1}$	10	$\xrightarrow{1}$	11	$\xrightarrow{1}$	01	$\xrightarrow{1}$	00	4
(2)	00	$\xrightarrow{1}$	01	$\xrightarrow{2}$	10	$\xrightarrow{1}$	11	$\xrightarrow{2}$	00	6
(6)	00	$\xrightarrow{2}$	11	$\xrightarrow{1}$	10	$\xrightarrow{2}$	01	$\xrightarrow{1}$	00	6
(4)	00	$\xrightarrow{1}$	10	$\xrightarrow{2}$	01	$\xrightarrow{1}$	11	$\xrightarrow{2}$	00	6
(5)	00	$\xrightarrow{2}$	11	$\xrightarrow{1}$	01	$\xrightarrow{2}$	10	$\xrightarrow{1}$	00	6

cadre : les deux codes de Gray, même tour du carré en sens contraires
flèche épaisse : deux bits changent d'un coup

Figure 11: Les six cycles des quatre états à deux bits (numérotés comme dans le tableau 2), avec la distance de Hamming de chaque pas (nombre de bits qui changent). Seuls les cycles (1) et (3), encadrés, n'ont que des pas de distance 1 (total 4) : ce sont les deux codes de Gray, le même tour $00-01-11-10$ parcouru dans un sens et dans l'autre. Les quatre autres alternent des pas de 1 et de 2 (flèches épaisses, total 6).

Deux propriétés en découlent automatiquement (elles ne restreignent rien de plus, et ne sont conservées qu'à titre descriptif) :

- **C2 : symétrie axiale de g^2** : pour (1) et (3), g^2 est l'involution axiale complète ($00 \leftrightarrow 11, 01 \leftrightarrow 10$) ; c'est la propriété reprise plus loin comme *Invariant B.I (involutivité de D)*.
- **C3 : profil de points fixes $(0, 0, 0, 4)$** : g^1, g^2, g^3 sans point fixe, $g^4 = e$ avec quatre ; c'est la propriété reprise comme *Invariant B.III (identité de L)*.

La démonstration de l'équivalence $(C1 \iff C1 \& C2 \& C3 \iff \{(1), (3)\})$ figure en Annexe C.

(1) et (3) sont inverses l'un de l'autre :

Cycle	Générateur	Séquence
Complexité	g (générateur (1))	$R \rightarrow D \rightarrow H \rightarrow L \rightarrow R \rightarrow \dots$
Entropie	g^{-1} (générateur (3))	$R \rightarrow L \rightarrow H \rightarrow D \rightarrow R \rightarrow \dots$

Remarque 11 (Complexité et entropie : deux sens du même cycle). *Les deux processus ne sont pas fondamentalement différents : ce sont les deux parcours possibles de $\mathbb{Z}_4$. $g \circ g^{-1} = L$: un système qui construit et dissout simultanément au même rythme reste lié.*

Construction des quatre portes. Le générateur (1) est choisi comme porte fondamentale $g = g^1$:

$$g = g^1 : \quad 00 \rightarrow 01, \quad 01 \rightarrow 11, \quad 10 \rightarrow 00, \quad 11 \rightarrow 10 \quad (37)$$

Les quatre portes en forme canonique :

$$g^1 = R : \quad 00 \rightarrow 01, \quad 01 \rightarrow 11, \quad 10 \rightarrow 00, \quad 11 \rightarrow 10 \quad (38)$$

$$g^2 = D : \quad 00 \rightarrow 11, \quad 01 \rightarrow 10, \quad 10 \rightarrow 01, \quad 11 \rightarrow 00 \quad (39)$$

$$g^3 = H : \quad 00 \rightarrow 10, \quad 01 \rightarrow 00, \quad 10 \rightarrow 11, \quad 11 \rightarrow 01 \quad (40)$$

$$g^4 = L : \quad 00 \rightarrow 00, \quad 01 \rightarrow 01, \quad 10 \rightarrow 10, \quad 11 \rightarrow 11 \quad (41)$$

3.7.2 Différenciation différée : ce qui émerge ici, ce qui se différencie plus haut.

Remarque 12 (Vocabulaire progressif des flux). À $N_{s-1,1}$ (porte à 2 Dits) : entrée/sortie ; à $N_{s-1,2}$ (boucle) : interne/externe ; à N_0 et au-delà : système/environnement. Les noms R, D, H, L sont utilisés par anticipation ; leur identité sémantique complète se réalise aux niveaux supérieurs.

À N_{-1} , deux paires restent indiscernables :

- **La paire $\{g^1, g^3\}$ se différencie en R et H à N_1 .** En l'absence de flèche du temps, les deux sens du flux asymétrique sont algébriquement indiscernables : lequel est sortie et lequel est entrée ne peut être déterminé. C'est l'acte de N_1 , le choix de $\pm i$, qui différencie g^1 (Reproduction, flux en sortie) de g^3 (Hiérarchisation, flux en entrée).
- **La paire $\{g^2, g^4\}$ se différencie en D et L à N_1 .** Ce qui distingue réciprocity *instantanée* (D) de coprésence *durable* (L) présuppose un temps orienté. Sans lui, les deux sont indiscernables. L'article N_0 le confirme : les deux axes y restent indifférenciés ($D = L$), et c'est l'acte de N_1 qui fait de g^2 la Différenciation et de g^4 la Liaison.

3.7.3 Propriétés structurelles des quatre composantes de $\mathbb{Z}_4$.

g^1 : flux asymétrique de sens positif (préfiguration de R).

Générateur du groupe, aucun point fixe, progression par un bit à chaque pas (code de Gray). En notation bit (état noté $b_1 b_0$) :

$$b'_1 = b_0, \quad b'_0 = \overline{b_1} \quad (42)$$

Demi-incrémenteur : rotation +1 sur l'orbite de Gray (échange des deux bits, suivi de la négation de b_0). Flux asymétrique orienté dont le sens exact (sortie ou entrée) sera différencié à N_1 .

g^2 : polarisation maximale et symétrique (préfiguration de D).

Double involution : $00 \leftrightarrow 11$ et $01 \leftrightarrow 10$. Aucun point fixe. En notation bit :

$$b'_1 = \overline{b_1}, \quad b'_0 = \overline{b_0} \quad (43)$$

Double NOT : polarisation maximale (2 bits d'écart). Involution : $g^2 \circ g^2 = e$, flux symétrique réciproque.

g^3 : flux asymétrique de sens inverse (préfiguration de H).

Rotation -1, orbite inverse de g^1 : $00 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 01 \rightarrow 00$. En notation bit (état noté $b_1 b_0$) :

$$b'_1 = \overline{b_0}, \quad b'_0 = b_1 \quad (44)$$

Demi-décrémenteur : $(g^3)^{-1} = g^1$, et $g^1 \circ g^3 = g^3 \circ g^1 = g^4 = e$, car $\mathbb{Z}_4$ est abélien.

g^4 : identité et fermeture du cycle (préfiguration de L).

Quatre points fixes : toutes les configurations restent.

$$b'_1 = b_1, \quad b'_0 = b_0 \quad (45)$$

Preuve algébrique que le cycle est accompli ($g^4 = g \circ g \circ g \circ g$). Flux externe nul : aucune transaction ne traverse la frontière ; le flux interne, lui, reste réciproque. À $N_{s-1,2}$, délimite un intérieur et un extérieur, d'un même geste : c'est la double nature examinée ci-dessous.

Pour le lecteur : le groupe à quatre éléments

Imaginons un cadran qui n'a que quatre positions, comme une horloge à quatre heures (haut, gauche, bas, droite). Le geste de base consiste à avancer l'aiguille d'un quart de tour ; on le note g . Deux quarts de tour font un demi-tour, noté g^2 ; trois quarts, g^3 . Au quatrième, l'aiguille est revenue au départ, comme si l'on

n'avait rien fait :

$$g^4 = e$$

(e désigne le geste « ne rien faire », qu'on note aussi 1).

On appelle *groupe* un ensemble de gestes qu'on peut enchaîner, où chaque geste peut être défait, et qui contient « ne rien faire ». Ici, il y a quatre gestes, g , g^2 , g^3 et $g^4 = e$, et tous s'obtiennent en répétant le seul g . C'est le groupe cyclique à quatre éléments, noté $\mathbb{Z}_4$. Dans l'article, ces quatre gestes agissent sur les quatre états à deux bits, et portent par anticipation les noms R , D , H , L .

Et encore une chose : trois quarts de tour dans un sens reviennent à un quart de tour dans l'autre sens. Le geste g^3 défait donc g ($g \cdot g^3 = g^4 = e$), c'est pourquoi on l'écrit aussi g^{-1} . En répétant g^{-1} , on passe lui aussi par les quatre positions, mais dans l'ordre inverse. Les deux autres gestes n'y arrivent pas : le demi-tour g^2 ne fait qu'alterner deux positions, et e reste sur place.

Il y a donc exactement deux façons d'engendrer tout le groupe : tourner d'un quart de tour dans un sens (g), ou dans l'autre (g^{-1}), et le groupe lui-même ne dit pas lequel des deux on doit appeler g .

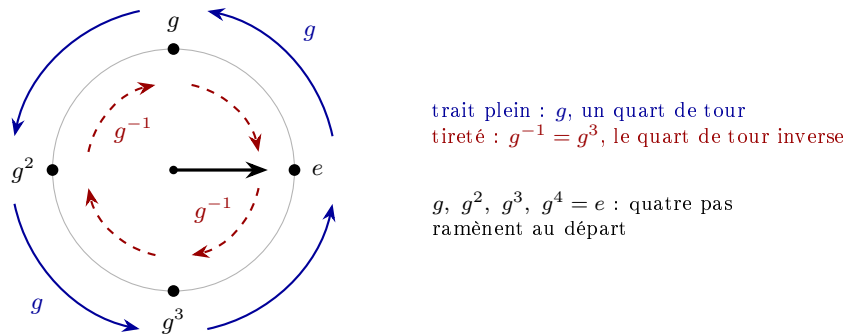


Figure 12: Le groupe $\mathbb{Z}_4$ comme un cadran à quatre positions. Chaque position est atteinte depuis le départ e par une puissance du quart de tour g : g , g^2 (demi-tour), g^3 , puis $g^4 = e$. Les flèches extérieures (trait plein) tournent dans le sens de g , les flèches intérieures (tireté) dans le sens de $g^{-1} = g^3$; chacun des deux engendre les quatre positions. Le sens dessiné pour g est une convention.

La double nature de g^4 : Liaison et Rupture. $g^4 = e$ est l'*identité* du groupe : il ne crée aucun écart, ni quantitatif ni qualitatif ($\mathcal{V}(g^4) = 0$). Mais « neutre » en ce sens algébrique ne signifie pas « sans effet », et il faut ici écarter une formulation tentante : on ne peut pas dire que g^4 ne fait rien. Ce qu'il produit, c'est la **cohérence interne** du système, le flux interne, et par là une **frontière** qui l'isole de son environnement. Le geste est d'un *flux externe nul* mais d'un *effet externe* bien réel : rien ne traverse la frontière, et pourtant cette frontière sépare désormais un dedans d'un dehors.

La double nature traditionnellement prêtée à L se loge exactement là, et elle est **interne/externe**, non directionnelle :

$$g^4 = \begin{cases} \textbf{Liaison} : \text{effet } \textit{interne} & \text{la clôture du cycle noue la cohérence et } \textit{pose} \text{ la frontière} \\ \textbf{Rupture} : \text{effet } \textit{externe} & \text{la même frontière constitue le système en } \textit{distinct} \text{ de son milieu} \end{cases} \quad (46)$$

La Rupture a elle-même deux visages qu'il ne faut pas confondre. Un visage *statique* : refermé sur lui-même, le système est, par constitution, distinct de son milieu ; c'est la frontière prise comme un état, et exister comme système, c'est déjà être en rupture avec le dehors, non par une action destructrice mais par la simple différence d'avec lui. Un visage *dynamique* : pour se constituer, un système prélève sa substance au dehors ; mais ce sont alors les **quatre** phases de la boucle, ensemble et non g^4 seul, qui alimentent au-dehors la boucle inverse. Le rôle propre de g^4 n'est donc pas de *produire* la rupture, mais d'en **protéger** le système : le lien interne est exactement ce qui fait tomber la dégradation au-dehors et non au-dedans.

Un porteur distinct : l'orientation σ . Autre chose est de savoir si la boucle d'un système *construit* ou *dégrade*, c'est-à-dire si elle parcourt l'orbite via g (RDHL, $\sigma = +1$) ou via $g^{-1} = g^3$ (RLHD, $\sigma = -1$).

Cette information est portée par σ , non par g^4 , et la distinction est essentielle : σ porte le *sens* du parcours, la double nature ci-dessus porte les deux *faces* d'une même frontière. Les confondre reviendrait à faire dépendre d'une orientation ce qui tient à la topologie de la clôture, et à charger l'élément neutre du groupe d'une distinction que seule une quantité *orientée* peut porter (théorème 5). On notera d'ailleurs que la face « environnement » suppose un processus *instancié* : à N_{-1} , la bifacialité reste purement formelle, un opérateur

et son inverse, sans énergie ni entropie à prélever au dehors. C'est l'orientation σ de la boucle complète, non l'opérateur isolé, qui arbitre laquelle des deux faces l'emporte.

Remarque 13 (La bifacialité des quatre fonctions : poser et consommer une frontière). *La double nature qu'on vient de décrire pour g^4 n'est pas propre à L : chacun des quatre opérateurs est bifacial, parce que chacun agit sur une frontière. Ce qu'une fonction construit en dedans, elle le prélève au dehors :*

Opérateur	Face système (en dedans)	Face environnement (au dehors)
$R = g^1$	produit l'identité du système	consomme l'identité de l'environnement
$D = g^2$	différencie le système	dédifférencie l'environnement (diffusion)
$H = g^3$	organise le système	désorganise l'environnement (contraintes)
$L = g^4$	relie et clôt le système	sépare et rompt avec le dehors

Poser n'est pas consommer. Il faut distinguer, pour chaque fonction, deux faces de statut différent. La **face posée** (côté système) est gratuite et conservative : clôt une frontière, c'est, d'un même geste, créer une cohérence interne et tracer une discontinuité avec le dehors. Cette face est l'acte de l'opérateur seul, instantané, et ne coûte rien ; elle reste fidèle au caractère neutre $L = g^4 = e$. La **face consommée** (côté environnement) est coûteuse et processuelle : la dégradation effective du dehors (l'égalisation du gradient, la dissipation) n'advient que si une boucle dégradante traverse réellement la frontière. L'opérateur ne fait que poser un potentiel ; le consommer exige un processus.

Réconciliation local / global. La bifacialité est ainsi une propriété locale de chaque fonction, indépendante de l'ordre de composition. Le sens global de la boucle ne la crée pas : il l'arbitre. En RDHL, les faces « système » l'emportent et le capital se concentre en dedans (complexification) ; en RLHD, les faces « environnement » dominant et le capital se dissipe au dehors (entropie). La frontière préexiste aux deux boucles (elle est posée par L) et les boucles ne décident que de son sort (cf. équation 46) : l'arbitre est donc l'orientation $\sigma = \pm 1$, et non l'un des quatre opérateurs pris isolément.

Ceci lève l'apparente anomalie de $L = e$: l'opérateur le plus conservatif peut être le siège de la « Rupture » sans se contredire, car il pose la frontière (séparation, gratuite) sans rien dissiper ; la consommation est payée par une boucle, non par L . On reconnaît la forme microGlobale du **second principe** : un système n'abaisse sa discernabilité interne qu'en élevant le désordre de son environnement, parce que les deux ne sont que les deux faces des mêmes opérateurs.

Une intensité mesurable. Cette dualité reçoit une mesure algébrique : la variation $\mathcal{V}(g^k) = (1, 2, 1, 0)$ pour (R, D, H, L) (distance de Hamming [23] moyenne ; figure 20) quantifie la face consommée, l'ampleur du désordre que l'opérateur peut infliger au dehors lorsqu'une boucle l'actualise. D y est maximal ($\mathcal{V} = 2$, le plus dissipatif) ; R et H sont intermédiaires et égaux ($\mathcal{V} = 1$, conformément à $R^{-1} = H$, symétrie achirale) ; et $\mathcal{V}(L) = 0$ est la signature quantitative du « poser n'est pas consommer » : L trace la frontière sans rien dégrader. La complémentarité des deux dynamiques de minimisation (§7.10.2), spatiale, $\mathcal{V} \rightarrow 2$, qui externalise l'entropie ; temporelle, $\mathcal{V} \rightarrow 0$, qui internalise le capital, trouve ainsi dans la bifacialité son fondement au niveau des opérateurs.

Réserve. À N_{-1} , cette bifacialité est purement **logique et topologique** : la « frontière » est une discontinuité de discernabilité entre un dedans et un dehors, le « potentiel » une asymétrie structurelle. Sa lecture énergétique (gradient d'énergie libre, dissipation) est héritée du niveau N_1 , où l'énergie émerge, au même titre que les projections cosmologiques qu'on serait tenté d'en tirer. La structure est ici ; son interprétation thermodynamique est là-haut.

3.7.4 Propriété fondamentale : flux symétriques et asymétriques.

D est une involution : $(g^2)^{-1} = g^2$, soit $D \circ D = L$. L est l'identité, trivialement involutive. $\Rightarrow D$ et L engendrent des **flux symétriques**. Pour L , cette symétrie est celle d'un flux *interne réciproque* doublé d'un flux *externe nul* ($\mathcal{V}(L) = 0$), là où D réalise une réciprocité externe maximale ($\mathcal{V}(D) = 2$).

R n'est pas une involution : $R \circ R = D \neq L$; son inverse est H . Symétriquement, $H^{-1} = R$. $\Rightarrow R$ et H engendrent des **flux asymétriques**.

$$(g^1)^{-1} = g^3 \neq g^1 : \quad R^{-1} = H, \quad H^{-1} = R \quad (47)$$

Le nombre de points fixes encode l'intensité du flux : R, D, H ont 0 point fixe (toutes les configurations sont impliquées) ; L en a 4 (flux externe nul, flux interne réciproque ; stabilité maximale). On retrouve ici la distinction fondamentale : R, D et H engendrent des flux *entre le système et son environnement* (ils traversent la frontière), tandis que L n'engendre que des flux *internes* (§1.1.3).

La table de Cayley du groupe résume ces relations :

$\circ$	R	D	H	L
R	D	H	L	R
D	H	L	R	D
H	L	R	D	H
L	R	D	H	L

Les écritures bit-à-bit (42)–(45) données plus haut ne sont qu’une *formulation* des permutations canoniques (38)–(41) : ces dernières restent l’objet primaire, et l’on vérifie directement sur les quatre configurations que les deux coïncident.

3.7.5 Relation avec les portes quantiques réversibles multi-qubits.

Statut de cette section

Les appariements proposés ci-dessous entre les quatre composantes de $\mathbb{Z}_4$ et des portes quantiques déterminées — Toffoli, Fredkin, CR_k , i SWAP — sont des **analogies structurelles**, non des dérivations. Aucun argument de cet article ne les établit, et aucun n’en dépend. Elles sont retenues parce qu’elles indiquent où chercher la réalisation physique des opérateurs, et elles relèvent à ce titre du même programme que la correspondance avec les interactions fondamentales (annexe J). Ce qui est en revanche acquis, et qui ne demande aucune analogie, est que les quatre portes de N_{-1} n’engagent ni qubit auxiliaire, ni phase complexe, ni conditionnalité externe : elles sont minimales au sens strict.

Les portes g^1 à g^4 opèrent sur deux bits classiques. Elles constituent le **substrat logique fondamental** de N_{-1} , dont les portes quantiques multi-qubits (Toffoli, Fredkin, CR_k , i SWAP) sont les **réalisations physiques aux niveaux supérieurs**.

La relation entre les deux niveaux de description est la suivante : les portes g^i capturent l’essence logique pure de chaque opérateur — la transformation minimale qui lui correspond. Les portes quantiques multi-qubits capturent sa réalisation dans un contexte physique plus riche, avec des bits de contrôle, des qubits ancilla, et des degrés de liberté supplémentaires qui permettent de modéliser la conditionnalité, la contextualité et la non-localité propres aux niveaux N_0 et N_1 .

En particulier :

- La porte $R = g^1$ (demi-incrémenteur) trouve sa réalisation physique dans la **porte de Toffoli** (CCNOT), qui encode la conditionnalité contextuelle de la reproduction et son universalité pour le calcul réversible.
- La porte $D = g^2$ (double NOT) trouve sa réalisation dans la **porte de Fredkin** (CSWAP), qui encode la redistribution symétrique et la conservation du poids de Hamming propres à la différenciation.
- La porte $H = g^3$ (demi-décrémenteur) trouve sa réalisation dans la **porte de phase contrôlée** CR_k , dont le paramètre k encode la profondeur de la relation hiérarchique instaurée.
- La porte $L = g^4$ (identité) trouve sa réalisation dans la **porte i SWAP**, dont la symétrie parfaite et le facteur de phase i encodent la nature qualitative de la liaison fonctionnelle entre deux structures.

Cette hiérarchie de descriptions — de la porte 2-bits classique à la porte quantique multi-qubits — n’est pas une redondance. Elle reflète le fait que le modèle microGlobal est **structuré par niveaux d’émergence** : la logique pure de N_{-1} se réalise en physique quantique à N_0 et N_1 , chaque niveau ajoutant des degrés de liberté supplémentaires sans trahir les invariants algébriques établis au niveau inférieur.

Op.	Porte 2-bits (N_{-1})	Opération logique	Sémantique	Porte quantique
$R = g^1$	$00 \rightarrow 01, 01 \rightarrow 11, 10 \rightarrow 00, 11 \rightarrow 10$	NOT b_0 , XOR conditionnel	Propagation orientée (incrémenteur)	Toffoli (CCNOT)
$D = g^2$	$00 \rightarrow 11, 01 \rightarrow 10, 10 \rightarrow 01, 11 \rightarrow 00$	NOT b_1 et NOT b_0	Polarisation symétrique (double NOT)	Fredkin (CSWAP)
$H = g^3$	$00 \rightarrow 10, 01 \rightarrow 00, 10 \rightarrow 11, 11 \rightarrow 01$	NOT b_0 , XOR direct	Recomposition inverse (décrémenteur)	CR_k
$L = g^4$	$00 \rightarrow 00, 01 \rightarrow 01, 10 \rightarrow 10, 11 \rightarrow 11$	Identité	Fermeture / frontière	i SWAP

Table 3: Tableau récapitulatif des quatre portes fondamentales du modèle microGlobal : porte logique 2-bits à N_{-1} , opération bit à bit, sémantique fonctionnelle, et réalisation quantique multi-qubits aux niveaux supérieurs.

Tableau récapitulatif général.

3.7.6 Synthèse : une seule porte engendre tout le système.

Proposition 6 (Génération unique du modèle microGlobal). *Les quatre opérateurs $\{R, D, H, L\}$ sont les puissances successives d’un unique générateur g dans $\mathbb{Z}_4$:*

$$R = g, \quad D = g^2, \quad H = g^3, \quad L = g^4 = \text{Id} \quad (48)$$

Ce générateur est caractérisé par le seul critère C1 : progression minimale par bit (code de Gray). Parmi les six 4-cycles sur $\{00, 01, 10, 11\}$, exactement deux le satisfont : le cycle de complexité (g , RDHL) et le cycle d'entropie (g^{-1} , RLHD). La symétrie axiale de g^2 et la clôture $g^4 = e$ (profil de points fixes) en sont des conséquences, non des conditions additionnelles.

Remarque 14 (Statut). *Énoncé de synthèse : il rassemble la sélection combinatoire et ses conséquences. Chacune est établie séparément ; leur composition n'ajoute pas de contenu.*

La même porte L , clôturant le cycle ou l'ouvrant, devient Liaison ou Rupture selon la direction du temps logique dans laquelle elle s'inscrit.

4 La genèse de la frontière : de l'indistinction au premier circuit

Les quatre composantes de $\mathbb{Z}_4$ ont été obtenues par sélection combinatoire, sans qu'aucune histoire n'ait été racontée. Ce chapitre en propose la lecture *génétique* : non pas une chronologie, que le substrat interdit (§3.1), mais l'ordre de dépendance logique par lequel une frontière, puis un circuit, puis un réseau de circuits se constituent à partir de ce qui n'est encore rien de distingué. L'enjeu n'est pas décoratif. C'est ce chapitre qui fournit l'objet — le réseau $\mathcal{N}_k$ — sur lequel reposera plus loin le mécanisme du passage à N_0 (§8.5) ; sans lui, la clôture algébrique dirait *quand* le passage est possible sans qu'on dispose d'aucune grandeur pour dire *où en est* le substrat.

Pour le lecteur : pourquoi ce niveau n'a pas de temps

Réolvons une petite équation : « (1) $x + 3 = 7$; (2) donc $x = 4$; (3) donc $2x = 8$ ». Le mot « donc » marque un ordre : la ligne (3) dépend de la ligne (2), qui dépend de la ligne (1). Mais cet ordre n'est pas un ordre dans le temps. La conclusion n'arrive pas « plus tard » que l'hypothèse ; elle est vraie en même temps qu'elle, que l'on lise la page en dix secondes ou en une heure. Le temps de la lecture n'appartient pas au raisonnement.

Dans cet article, tous les mots de succession (« puis », « étape », « prépare ») ont ce sens-là quand ils portent sur N_{-1} . Écrire g , g^2 , g^3 pour la boucle ne décrit pas trois instants. Cela décrit trois degrés de composition d'une même opération : g^2 est g appliqué deux fois, au sens où 2 vaut $1 + 1$, sans qu'aucune horloge ne tourne. Les « pas » de la boucle sont des pas logiques (figure 13).

Le temps n'est pas oublié pour autant : il est un résultat du programme, et il se construit par étages. N_0 ne porte encore qu'un axe d'ordre, sans sens de marche et sans dynamique. Le temps orienté, celui qui va du passé vers le futur, n'apparaît qu'à N_1 , avec le choix du signe $\pm i$. Lire le substrat comme une histoire qui se déroule reviendrait donc à supposer au départ ce que l'on veut obtenir à l'arrivée.

En une phrase : à N_{-1} , « avant » veut dire « nécessaire pour », et jamais « plus tôt que ».

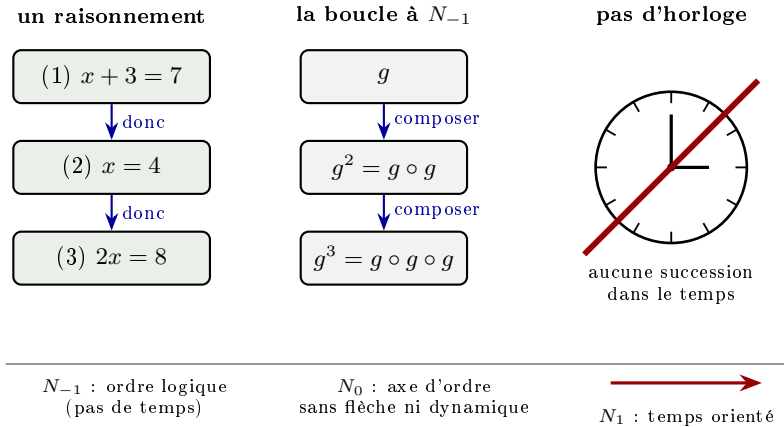


Figure 13: Des successions sans temps. Dans un raisonnement (à gauche), « donc » marque une dépendance, non un moment ; de même, g , g^2 , g^3 (au centre) sont des degrés de composition, non trois instants. À N_{-1} aucune horloge ne tourne (à droite). Le temps se construit plus haut : N_0 ne porte qu'un axe d'ordre sans orientation, et le temps orienté n'apparaît qu'à N_1 .

4.1 L'état d'indistinction : ce qui précède la première frontière

Avant qu'une frontière ne soit tracée, il n'y a ni système, ni environnement, ni intérieur, ni extérieur. Il n'y a pas non plus de désordre : le désordre suppose des états déjà distinguables dont on constaterait le mélange. Il y a l'**indistinction**, qui est l'absence de la catégorie même d'ordre et de désordre. Deux structures quelconques n'y sont ni identiques ni différentes : la question ne se pose pas encore, faute d'un opérateur pour la poser.

Lecture générative, non extensionnelle

Il serait tentant de décrire cet état comme un *plénium* : un foisonnement où toutes les structures mathématiques concevables coexisteraient déjà, ensembles, groupes, topologies, en attente d'être reliées. Le modèle écarte explicitement cette lecture (annexe F) : il serait contradictoire de poser à côté du générateur unique un stock de structures qu'il n'aurait pas engendrées. L'indistinction initiale n'est donc pas un magasin d'objets ; c'est l'état où *aucune* distinction n'est encore tracée, et où l'espace des configurations n'existe qu'au sens **génératif** : le noyau a de quoi les engendrer, elles n'y sont pas déposées. Tous les décomptes qui suivent portent sur des configurations *engendrables*, jamais sur un inventaire préalable.

Formellement, soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des configurations engendrables par le noyau et $|\mathcal{M}|$ son cardinal. Tant qu'aucune frontière n'est posée, aucune configuration n'est privilégiée ; le décompte est uniforme,

$$p(\mathcal{A}) = \frac{1}{|\mathcal{M}|} \quad \forall \mathcal{A} \in \mathcal{M}, \quad (49)$$

et la **grandeur combinatoire de description** associée est maximale :

$$H(\mathcal{M}) = - \sum_{\mathcal{A} \in \mathcal{M}} p(\mathcal{A}) \log_2 p(\mathcal{A}) = \log_2 |\mathcal{M}|. \quad (50)$$

H n'est pas une entropie

La quantité (50) a la *forme* d'une entropie de Shannon, elle n'en est pas une. Elle ne mesure ni un désordre, ni une ignorance, ni un état : elle compte des descriptions, et le décompte uniforme n'y traduit aucune probabilité mais l'absence de raison de privilégier une configuration. L'entropie proprement dite n'existe pas à N_{-1} , et le chapitre 8.3 établit à quelle condition ; H est ici un instrument de comptage, utilisé pour mesurer un *écart* entre deux ensembles de configurations, jamais pour attribuer une valeur d'état au substrat.

4.2 La boucle comme réduction de l'indétermination

Une objection se présente immédiatement. Si l'état initial est celui d'une indétermination sans loi, comment quelque chose d'aussi réglé qu'une boucle réversible peut-il s'y constituer ? La réponse tient à ce qu'aucune loi extérieure n'est requise. La boucle ne s'impose pas d'ailleurs : elle se referme sur elle-même, et c'est cette clôture qui crée une régularité locale là où rien ne l'ordonnait. Le déterminisme n'est pas un postulat du modèle, c'est un produit de la fermeture.

Soit $\mathcal{M}_{\text{RDHL}} \subset \mathcal{M}$ l'ensemble des configurations compatibles avec la boucle, c'est-à-dire celles que le parcours $R \rightarrow D \rightarrow H \rightarrow L$ laisse stables ou reproduit. On a $|\mathcal{M}_{\text{RDHL}}| \ll |\mathcal{M}|$, et l'écart

$$\Delta H = H(\mathcal{M}) - H(\mathcal{M}_{\text{RDHL}}) = \log_2 \frac{|\mathcal{M}|}{|\mathcal{M}_{\text{RDHL}}|} > 0 \quad (51)$$

mesure exactement ce que la boucle retranche d'indétermination. Plus ΔH est grand, plus la structure engendrée est contrainte, donc répétable : mêmes entrées, mêmes sorties. C'est en ce sens précis, et en ce sens seulement, que le déterminisme émerge de l'indéterminé.

Ce résultat éclaire rétrospectivement le critère C1 (§3.7). La sélection de la paire d'orbites de Gray parmi les vingt-quatre permutations est elle-même une réduction de ce type, et la plus économique de toutes : un unique critère, n'empruntant rien à la physique, y ramène 24 possibilités à 2. La boucle n'est pas un opérateur parmi d'autres qui se trouverait réduire l'indétermination ; elle est celui qui la réduit *au prix minimal*, ce que la moindre action de Hamming (proposition 16) énonce sous une autre forme.

4.3 Le premier partage : système et environnement

Poser une frontière, c'est diviser. Dès que la première distinction est tracée, l'ensemble $\mathcal{M}$ cesse d'être pensable comme un tout indifférencié et se partage :

$$\mathcal{M} = \mathcal{S} \cup \mathcal{E}, \quad \mathcal{S} \cap \mathcal{E} = \emptyset, \quad (52)$$

où $\mathcal{S}$ est ce que la boucle a engendré et $\mathcal{E}$ tout le reste. La dualité intérieur/extérieur naît là, et avec elle la possibilité même qu'un système soit *quelque chose* plutôt que rien de délimité. Il faut cependant se garder d'y voir un mur : la frontière est un Dit (§18), c'est-à-dire une interface qui sépare et relie du même geste, et elle définit simultanément ce qu'est le système et comment il peut entrer en relation avec ce qui n'est pas lui.

Les trois régimes de cette relation ne sont pas nouveaux : ce sont les régimes de frontière déjà établis (§3.4.5), lus cette fois entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{E}$ plutôt qu'entre deux structures quelconques. L'équilibre $\mathcal{S} = \mathcal{E}$ est le régime de D ; l'intégrité $\mathcal{S} \neq \mathcal{E}$ celui de H ; la reproduction $\mathcal{S} \equiv \mathcal{S}'$ celui de R ; la cohésion celui de L . La condition de durabilité déjà écrite les exige tous les quatre simultanément. Ce que le présent chapitre ajoute n'est donc pas un cinquième régime, mais l'observation que le partage lui-même est le *premier produit* de la boucle, antérieur à toute qualification de ce qui est ainsi partagé.

4.4 La hiérarchie des signes

Les quatre régimes n'apparaissent pas d'un seul coup : ils se constituent dans l'ordre de dépendance logique qu'induit la longueur orientée δ (§9). On peut donc dresser l'échelle de leur apparition, en gardant à l'esprit que « niveau » y désigne un palier de constitution interne à N_{-1} , non un niveau de la hiérarchie $N_{-1}, N_0, N_1 \dots$

Palier	Signe acquis	Ce qui devient possible
Indistinction	aucun	Aucune relation : ni $\equiv$, ni $=$, ni $\neq$, ni $\emptyset$. Rien ne peut être comparé.
$\delta = 1$	$\equiv$ (R)	Le dédoublement produit deux entités que rien ne différencie : $\mathcal{A}'_1 \equiv \mathcal{A}'_2$. Première frontière stable ; la seule information est la cardinalité.
$\delta = 2$	$=$ (D)	Quantité partagée, qualité distincte : le système se différencie de son environnement. C'est la signature d'une brisure de symétrie.
$\delta = 3$	$\neq$ (H)	Distinction complète, rang institué : $\mathcal{S} \neq \mathcal{E}$. La frontière est pleinement établie.
$\delta \equiv 0$	$\emptyset$ (L)	Fusion : l'unité liée devient un élément du niveau supérieur. La cristallisation vers N_0 devient possible.

Une correspondance mérite d'être explicitée, car une lecture concurrente circule. On présente parfois les quatre visages de la frontière comme $\{=, <, >, \neq\}$, en faisant de $=$ la première frontière. Ce n'est pas la convention retenue ici, et l'écart n'est pas terminologique. Dans le présent cadre, la première frontière est $\equiv$, l'identité de deux copies, car le dédoublement ne suppose aucune qualité partagée ; $=$ vient ensuite, comme partage de la quantité avec écart de qualité. Quant à $<$ et $>$, ils ne sont pas deux régimes supplémentaires mais les *deux orientations* d'un seul, celui de H : $\mathcal{A} < \mathcal{B}$ et $\mathcal{B} > \mathcal{A}$ énoncent le même rang lu dans les deux sens, et cette orientation est précisément ce que le verrou achiral (théorème 5) interdit de fixer à N_{-1} . Les lire comme des régimes distincts reviendrait à inscrire dans le substrat une asymétrie que l'article établit ne pas y être inscrite.

4.5 Le premier circuit logique

Une frontière possède deux faces, et entre ces deux faces quelque chose peut circuler. Le **premier circuit logique** est le chemin le plus court qui relie un point de la frontière à lui-même en traversant l'intérieur du système. Il faut le distinguer nettement de la boucle RDHL : la boucle est ce qui *engendre* le système, le circuit est ce qui *opère* en son sein.

Définition 2 (Circuit logique). Un circuit logique sur un système $\mathcal{S}$ est un endomorphisme périodique

$$\mathcal{C} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}, \quad \exists n \in \mathbb{N}^* : \mathcal{C}^n = \text{id}_{\mathcal{S}}, \quad (53)$$

et n est sa *période*.

La période classe les circuits sans qu'aucune hypothèse supplémentaire ne soit requise : $n = 1$ donne le circuit trivial, pure identité, qui n'opère rien ; $n = 2$ donne l'oscillateur logique élémentaire, qui alterne sans accumuler ; $n \geq 3$ donne les circuits dotés d'une mémoire interne, capables de porter plus d'un état intermédiaire. La boucle canonique est de période quatre, ce qui n'est pas un choix mais une conséquence : $g^4 = e$ et aucune puissance inférieure n'est l'identité.

Un circuit hérite de la contrainte du niveau. Comme toute transformation de $\mathcal{T}$ est bijective (§3.1), il est **conservatif** :

$$\mathcal{D}(\text{entrée}) = \mathcal{D}(\text{sortie}) \quad \text{à chaque itération,} \quad (54)$$

au sens de la discernabilité et non d'une information physique, qui n'existe pas encore. Aucune distinction n'est perdue ni créée dans un circuit de N_{-1} : elle est seulement transformée. C'est la signature computationnelle du niveau, et c'est aussi ce qui interdit d'y voir un traitement au sens usuel : un circuit ne calcule pas *sur* des données, il déplace des distinctions.

4.6 Dédoublément, réseau, et croissance de la complexité

Un circuit seul est stable mais fermé sur lui-même. Ce qui permet au substrat de progresser, c'est que le circuit se dédouble — et ce dédoublement n'est pas un ajout extérieur : il est exactement ce que les quatre opérateurs font lorsqu'on les applique, non plus à des configurations, mais à des circuits. La récursivité de R déjà établie (§5.9) autorise ce changement de palier.

$$R(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}'_1 \text{ avec } \mathcal{C}'_1 \cong \mathcal{C}_1, \quad D(\mathcal{C}'_1) = \mathcal{C}_2 \text{ avec } \mathcal{C}_2 \not\cong \mathcal{C}_1, \quad L(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) =: \mathcal{N}_2. \quad (55)$$

R produit une copie isomorphe ; D introduit l'écart qui fait de la copie autre chose qu'un doublon ; H ordonne les circuits obtenus en paliers ; L les relie en un **réseau logique** $\mathcal{N}$. Aucun des quatre ne suffit seul, et la raison en est symétrique de celle déjà donnée pour les configurations : R sans D produirait des copies indéfiniment identiques, donc aucune nouveauté ; D sans R produirait de la diversité sans rien qui la stabilise ; H sans L produirait des paliers isolés ; L sans H produirait des connexions plates, sans organisation.

Après k dédoublements, le réseau compte

$$|\mathcal{N}_k| = 2^k \quad (56)$$

circuits interconnectés. Deux circuits liés ne sont pas indépendants : ils partagent au moins le Dit par lequel L les a reliés, de sorte que leur discernabilité conjointe est strictement inférieure à la somme des discernabilités séparées. C'est le même phénomène que celui que la cohérence de phase exploitera plus loin (§5.13) : un Dit partagé est *un* Dit, non deux qui se ressemblent.

Ce que ce chapitre ajoute

Trois objets nouveaux, tous construits à partir des seules ressources déjà établies. Le **partage** $\mathcal{M} = S \cup \mathcal{E}$, premier produit de la frontière. Le **circuit** $\mathcal{C}$, endomorphisme périodique conservatif, qui opère dans le système sans rien lui retrancher. Le **réseau** $\mathcal{N}_k$, de taille 2^k , qui croît par application des quatre opérateurs aux circuits eux-mêmes. Ce dernier est l'objet dont le chapitre 8 avait besoin : il fournit la grandeur qui croît, et donc ce sur quoi un seuil peut être défini.

5 La boucle comme critère fondamental de N_{-1} : émergence de la durabilité à N_0

Les quatre composantes de $\mathbb{Z}_4$ étant établies, la question devient : dans quel **ordre** les composer pour que la structure *persiste et s'accumule* ?

Enjeu du chapitre. Ce chapitre est le *climax démonstratif* de l'article. La section précédente a identifié $\mathbb{Z}_4$ comme la structure algébrique minimale satisfaisant la contrainte de réversibilité sur deux bits. Mais $\mathbb{Z}_4$ possède *six* 4-cycles distincts dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$: six manières de composer les quatre opérateurs en boucle fermée. Le présent chapitre démontre que parmi ces six possibilités, *deux seulement* satisfont les critères de fermeture conservative compatible avec la discernabilité (les boucles RDHL et RLHD) et que rien, à N_{-1} ni à N_0 , ne sépare ces deux-là. La sélection s'opère donc en deux temps logiques distincts : une sélection combinatoire stricte à N_{-1} ($6 \rightarrow 2$), puis le choix de $\pm i$, qui est l'acte de N_1 ($2 \rightarrow 1$) ; et ce choix est une convention, qu'aucune observable ne lit. Cette architecture à deux strates n'est pas une commodité méthodologique : elle reflète la structure même de l'émergence, ce qui est indistinguable au niveau logique pur se distingue à l'instanciation physique, ce qui est la signature d'une émergence ontologique. Le chapitre établit aussi que la boucle RDHL est invariante par changement de niveau, ce qui en fait le *principe trans-scalaire* fondamental du programme.

5.1 La boucle comme critère primordial de N_{-1}

À N_{-1} , il n'y a pas de temps ni de durabilité au sens physique. Le critère fondamental est plus primitif : la **fermeture logique**. Elle prend deux formes (figure 14) :

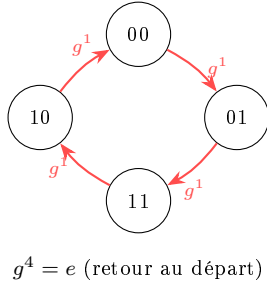
Fermeture topologique : l'orbite du générateur g^1 se referme, $g^4 = e$, chaque état revient à lui-même après 4 pas.

Fermeture dynamique : la composition séquentielle des quatre phases $\sigma = L \circ H \circ D \circ R$ forme un opérateur bien défini sur $\{0, 1\}^2$ (égal à D ; §3.7). L'application répétée de σ mesure la durabilité structurelle.

$$g^4 = e \quad (\text{fermeture topologique}) \quad \sigma = L \circ H \circ D \circ R = D \quad (\text{fermeture dynamique}) \quad (57)$$

Fermeture *topologique*

l'orbite se referme



Fermeture *dynamique*

la composition transforme

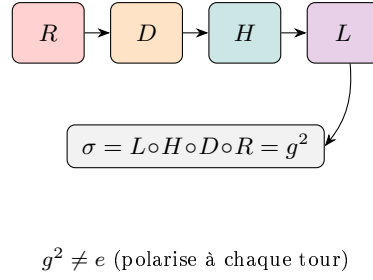


Figure 14: Les deux fermetures, à ne pas confondre. À gauche, la fermeture *topologique* : l'orbite est engendrée en appliquant quatre fois le seul générateur $R = g^1$, et $g^4 = e$ ramène au départ. À droite, la fermeture *dynamique* : la composition des quatre opérateurs *distincts* vaut $\sigma = g^2 \neq e$, donc chaque tour transforme effectivement la configuration.

Pourquoi les deux fermetures sont conjointement nécessaires. Ces deux formes ne sont pas redondantes : elles décrivent deux aspects complémentaires que la fermeture seule, dans l'une ou l'autre version, ne saurait capturer. La fermeture *topologique* ($g^4 = e$) garantit que le cycle existe comme entité : l'orbite de g^1 se referme sur elle-même après quatre pas, condition sans laquelle aucune notion de boucle n'aurait de sens. Mais une orbite qui se referme n'implique pas que sa composition séquentielle produise une transformation significative : si σ valait l'identité, le cycle serait purement *contemplatif* ; il existerait sans rien transformer. La fermeture *dynamique* ($\sigma = D$, et non e) garantit au contraire que chaque parcours du cycle effectue un travail logique : il *polarise* la configuration sur laquelle il s'applique. Ainsi, la topologie donne au cycle son *être* (la boucle existe comme structure close), et la dynamique lui donne son *agir* (la boucle transforme à chaque parcours). L'une sans l'autre serait insuffisante : une boucle qui ne se refermerait pas ne serait pas une structure ; une boucle dont la composition vaudrait l'identité serait une structure inerte. C'est leur conjonction qui est le capital structural primitif de N_{-1} .

La fermeture crée un **intérieur logique** : une propriété purement algébrique qui délimite un « dedans » et un « dehors » — le premier capital structural possible à N_{-1} . Sans boucle, les transformations se succèdent sans rien former ; avec une boucle, la clôture produit une structure irréductible que chaque passage renforce.

Critère fondamental de N_{-1}

Une composition d'opérateurs logiques sur $\{0,1\}^2$ **forme une structure** si et seulement si elle forme une **boucle fermée**. Toute séquence ouverte est structurellement vide.

La fermeture est aussi le mécanisme de la séquence dimensionnelle. À N_0 , selon une lecture du programme (et non une dérivation), un nœud qui s'étire produit une ligne ; une ligne qui se referme produit une surface ; une surface produit un volume ; un volume se referme en durée, un axe d'ordre encore sans orientation. Cette séquence est la même que celle des sous-niveaux de N_{-1} :

- $Ns_{-1,0}$: le Dit : distinction primordiale, ouverture pure.
- $Ns_{-1,1}$: la porte à 2 Dits : assemblage de Dits, émergence des fonctions g^1 – g^4 .
- $Ns_{-1,2}$: la boucle RDHL : séquence close, premier intérieur distinct d'un extérieur.
- $Ns_{-1,3}$: assemblages de boucles : structures d'ordre supérieur, préfiguration du couplage système/environnement.
- N_0 : la durée, axe d'ordre sans orientation, naît de la fermeture du volume logique ; son orientation attend N_1 .

Remarque 15 (Le Dit comme seule ouverture). *Le Dit est le seul terme qui ne soit pas une fermeture mais une ouverture : depuis l'indistinct, deux possibilités. Il est la condition de possibilité de toutes les fermetures ultérieures, non une fermeture lui-même : c'est pourquoi il est à $Ns_{-1,0}$, non à $Ns_{-1,1}$.*

Toutes les boucles fermées ne se valent pas. Sur $\{0,1\}^2$, il existe 6 classes de boucles d'ordre 4. La fermeture seule ne suffit pas : un second critère sélectionne celles qui **conservent le potentiel de distinction à chaque pas** — les boucles RDHL et RLHD (Proposition 7).

5.2 La durabilité comme projection à N_0

Quand le temps orienté émerge, à N_1 , la fermeture conservative se projette en **durabilité** : la capacité d'une boucle à être parcourue indéfiniment sans dégrader la structure qu'elle forme.

Fermeture et durabilité

À N_{-1} : critère de **fermeture conservative**.

À N_1 et au-delà : **durabilité**, mesure temporelle de la fermeture conservative.

(À ne pas confondre avec la durabilité de l'article N_0 : le compromis entre la complexité des frontières et la liberté des configurations, qui fixe une zone du couplage J .)

Mécanisme de la projection. Le changement n'est pas de vocabulaire mais de statut. À N_{-1} , la fermeture conservative est *intemporelle* : $\mathcal{L}(x) = x$ est une identité algébrique, sans durée. À N_1 , dès que les transformations se succèdent dans un temps orienté, la même identité devient itérable, et la question passe du qualitatif au quantitatif : combien de parcours sans dégradation ? Deux opérations formalisent ce passage, l'*itération* (σ devient la suite (σ^n) , chaque application valant un quantum de temps) et la *limite de Césaro* qui en moyenne le retour au point fixe (éq. 60). C'est ce mécanisme qui justifie l'architecture à deux strates de la démonstration : la Strate I établit la fermeture algébrique à N_{-1} , la Strate II vérifie qu'aucune distinction n'apparaît à N_0 , et la Strate III situe la sélection à N_1 .

5.3 Définition formelle des boucles logiques

À N_{-1} , la boucle RDHL recouvre deux notions distinctes mais cohérentes :

(a) **La boucle topologique : orbite du générateur.** L'orbite de $g^1 = R$ sur $\{0,1\}^2$ est le 4-cycle :

$$\mathcal{L}_{\text{top}} := (A, g^1(A), g^2(A), g^3(A), g^4(A) = A) \quad (58)$$

La fermeture $g^4 = L = e$ est exacte après 4 pas : chaque état revient à lui-même. Cette définition décrit la *topologie* du cycle.

(b) **La boucle dynamique : composition séquentielle.** Appliquée à un système évolutif, la boucle désigne l'application successive des quatre opérateurs à l'état courant :

$$\sigma_{\text{RDHL}} := L \circ H \circ D \circ R \quad (59)$$

Cette composition vaut D (vérifié par calcul direct ; table de Cayley §3.7), non l'identité. C'est cette définition qui gouverne la mesure de durabilité : $\sigma_{\text{RDHL}} = D$ est d'ordre 2, d'où $\mathcal{D}_{\text{comb}} = 1/2$.

Les deux notions sont cohérentes : la topologie de la boucle (orbite fermée de g^1) justifie l'existence du cycle ; la dynamique de la boucle (composition $\sigma = D$) mesure sa durabilité.

Le sens profond de $\sigma = D$ et non $\sigma = e$. Le résultat $\sigma_{\text{RDHL}} = D$ mérite une attention particulière. On pourrait s'attendre intuitivement à ce que la composition d'un cycle complet ramène à l'identité ($\sigma = e$) : si l'orbite topologique se referme ($g^4 = e$), pourquoi la composition dynamique ne serait-elle pas elle-aussi triviale ? La réponse montre la nature productive du cycle. La distinction topologique / dynamique correspond à deux questions différentes : $g^4 = e$ répond à *où va l'état initial après quatre applications du même opérateur ?* (réponse : il revient à lui-même) ; $\sigma = L \circ H \circ D \circ R$ répond à *quelle transformation globale résulte de l'application successive des quatre opérateurs distincts ?* (réponse : l'involution D). L'écart entre g^4 et σ est ce qui rend la boucle *productive* : parcourir le cycle ne ramène pas l'état à son origine, il le *polarise* d'une involution complète. Chaque parcours réalise donc un *travail logique* (un changement irréductible de configuration) tout en préservant la réversibilité globale. Si l'on avait $\sigma = e$, la boucle serait une oscillation stérile : parcourir le cycle n'aurait aucun effet net, le système retournerait à son état de départ et la notion même de durabilité ($\mathcal{D}_{\text{comb}}$) serait dégénérée à 1 trivialement. Le fait que $\sigma = D$ soit une involution d'ordre 2 produit au contraire la valeur $\mathcal{D}_{\text{comb}} = 1/2$, ni trop bas (le cycle aurait une période trop longue pour stabiliser une structure), ni trop haut (l'oscillation serait stérile). Cette valeur intermédiaire est la signature algébrique d'un cycle à la fois *fermé* et *actif*, ce que requiert un substrat capable d'engendrer une physique.

5.4 Le principe de durabilité à N_0

La durabilité se mesure par trois propriétés simultanées : **réversibilité complète** (unitarité à N_0), **minimalité des ressources** (analogue du principe de moindre action), **cohérence globale** (corrélations maintenues sur l'ensemble du cycle). C'est une propriété systémique : deux boucles utilisant les mêmes primitives peuvent différer radicalement selon l'ordre de composition.

Mesure formelle : architecture à deux strates.

- **Strate I : durabilité combinatoire** (à N_{-1}) : fréquence de retour à l'état initial sur l'orbite :

$$\mathcal{D}_{\text{comb}}(\mathcal{L}_\pi) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \# \{k \leq n \mid \sigma_\pi^k(A) = A\} \quad (60)$$

Calcul direct : RDHL et RLHD ont $\sigma_\pi = D$ (involution, période 2), donc $\mathcal{D}_{\text{comb}} = 1/2$ pour les deux.

- **Strate II : durabilité à N_0 : identité par prolongement.** À N_0 , les opérateurs g^k s'étendent en unitaires de $\mathbb{C}^4$ et l'identité opératoire $\sigma_{\text{RDHL}} = \sigma_{\text{RLHD}} = g^2$ (remarque 16, plus loin) assure $\mathcal{D}_{\text{phys}}^{(N_0)} = \mathcal{D}_{\text{comb}} = 1/2$ pour les deux boucles. Aucune asymétrie n'émerge à ce niveau.
- **Strate III : durabilité à N_1 : la sélection par l'acte.** À N_1 , la sélection d'une des deux racines de $\mathbb{C}$ distingue les deux boucles : le sens retenu est donné par le signe de la phase géométrique $\pm i$ de l'orbite de Gray (proposition 8), et

$$\mathcal{D}_{\text{phys}}^{(N_1)}(\mathcal{L}_{\text{RDHL}}) = \mathcal{D}_{\text{phys}}^{(N_1)}(\mathcal{L}_{\text{RLHD}}) = \mathcal{D}_{\text{comb}} = \frac{1}{2}, \quad (61)$$

les deux boucles restant d'égale durabilité : ce qui les sépare est un *signe*, non une grandeur. La dispersion n'y intervient pas comme facteur : elle est une lecture du même acte (section 6). Le signe retenu est une convention : l'article N_1 établit qu'aucune observable ne le lit.

À N_{-1} et N_0 , RDHL et RLHD sont strictement indiscernables : algébriquement à N_{-1} (théorème d'indistinguabilité, §5.7), spectralement à N_0 (verrou de l'article N_0 , sous ses prémisses P1 et P2 ; voir aussi la remarque 16). Ce n'est qu'à N_1 que la distinction devient effective : la phase $\pm i$ s'y réalise comme phase géométrique du cycle, sur la cellule d'aire $h/4$ d'un mode (proposition 10, établie à N_1).

5.5 Résultats de la mesure de durabilité

- **Existence des limites prouvée** : par Cesàro (à N_{-1} , Annexe E) ; à N_0 , l'identité opératoire (remarque 16) donne $\mathcal{D}_{\text{phys}}^{(N_0)} = \mathcal{D}_{\text{comb}}$ pour les deux boucles ; à N_1 , la sélection est un choix de convention, et la phase y est réalisée (Annexe E et section 6).
- **Valeurs calculées** : $\mathcal{D}_{\text{comb}} = 1/2$ sans hypothèse physique, pour les deux boucles et à tous les niveaux ; le signe de la phase géométrique $\pm i$ (proposition 8) les nomme sans changer leur durabilité.
- **Cohérence avec l'indistinguabilité** : $\mathcal{D}_{\text{comb}}(\text{RDHL}) = \mathcal{D}_{\text{comb}}(\text{RLHD}) = 1/2$ confirme l'absence de flèche du temps *sélectionnée* à N_{-1} (nulle grandeur symétrique ne la lit ; figure 15).

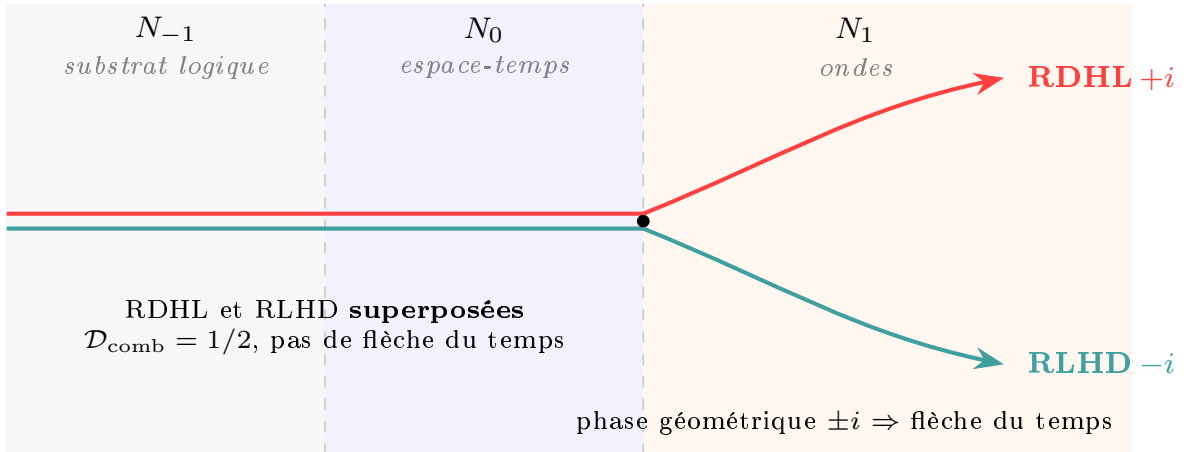


Figure 15: La divergence RDHL / RLHD à travers les niveaux. Les deux orbites sont *indiscernables par toute grandeur symétrique* à N_{-1} et N_0 ($\mathcal{D}_{\text{comb}} = 1/2$ pour les deux) : aucune flèche du temps *sélectionnée*. Elles ne se séparent qu'à N_1 , où la phase géométrique $\pm i$ (signe T-impair) distingue le sens trigonométrique (RDHL, $+i$) du sens horaire (RLHD, $-i$) ; à N_1 , ce signe nomme le sens du temps, par une convention inobservable (figure 24, proposition 8).

La boucle RDHL : définition.

$$\mathcal{L}_{\text{RDHL}} : \underbrace{00 \xrightarrow{g^1} 01 \xrightarrow{g^1} 11 \xrightarrow{g^1} 10 \xrightarrow{g^1} 00}_{\text{orbite topologique}} \quad \underbrace{\sigma_{\text{RDHL}} = L \circ H \circ D \circ R = D}_{\text{dynamique : ordre 2}} \quad (62)$$

L'orbite topologique décrit les 4 états visités ; la composition dynamique $\sigma = D$ gouverne la mesure de durabilité. Les quatre phases préparent chacune la suivante : g^1 institue un gradient (flux asymétrique) ; g^2 le polarise (involution maximale) ; g^3 l'intègre (flux inverse) ; g^4 clôt le cycle (coprésence). Ce cycle est exhaustif : il couvre les quatre types de flux possibles entre deux configurations.

5.6 Propriétés formelles de la boucle RDHL

Les propriétés suivantes se répartissent en deux strates selon le niveau auquel elles sont établies.

- **[Strate I] Conservation de la discernabilité (non-décroissance)** : à chaque cycle, le nombre de configurations discernables accessible depuis $\mathcal{A}$ est non-décroissant :

$$|\text{Orb}_{\mathcal{L}_{\text{RDHL}}}^{(n+1)}(\mathcal{A})| \geq |\text{Orb}_{\mathcal{L}_{\text{RDHL}}}^{(n)}(\mathcal{A})| \quad (63)$$

Conséquence directe de la bijectivité de chaque g^k : aucune configuration n'est perdue à chaque pas. La quantité est *bornée* (l'espace est fini) et sature dès les premiers pas ; il s'agit donc d'une conservation, non d'une croissance illimitée.

- **[Strate I] Réversibilité globale** : $\mathcal{L}_{\text{RDHL}}^{-1} = \mathcal{L}_{\text{RLHD}} = D \circ H \circ L \circ R$. Conséquence algébrique de $\mathbb{Z}_4$: l'inverse de g est $g^{-1} = g^3$.
- **[N_0] Identité opératoire avec RLHD** : comme unitaires sur $\mathbb{C}^4$, $\sigma_{\text{RDHL}} = \sigma_{\text{RLHD}} = g^2$ (remarque 16). Ce sont leurs compositions nettes qui coïncident, et cela vaut déjà à N_{-1} , pour les vingt-quatre ordres. Les générateurs g et g^{-1} restent deux opérateurs distincts, échangés par la conjugaison ; à N_0 , aucune observable invariante ne les sépare (verrou spectral de l'article N_0 , sous ses prémisses P1 et P2).
- **[N_1] Réalisation établie** : l'article N_1 réalise la phase géométrique $\pm i$ sur la cellule d'aire $h/4$ des deux quadratures d'un mode, sans que la forme de la dispersion intervienne. Le signe ($+i$ pour RDHL, $-i$ pour RLHD) nomme les deux boucles ; lequel est retenu est une convention, qu'aucune observable ne lit (section 6).
- **[niveaux instanciés, conjectural] Capital cumulé** : le sens nommé RDHL accumulerait le capital, et son inverse le dissiperait à taux symétrique. Le nom de chaque sens étant une convention (article N_1), l'énoncé porte sur la relation entre les deux sens, non sur l'un d'eux.

La boucle dégradante RLHD : inverse de RDHL. RLHD est engendrée par $g^{-1} = g^3$:

$$\mathcal{L}_{\text{RLHD}} : R \rightarrow L \rightarrow H \rightarrow D \rightarrow R \quad (64)$$

Mêmes primitives, même algèbre $\mathbb{Z}_4$, mais parcourus en sens inverse. À N_{-1} et N_0 , cette inversion est sans effet observable : $\sigma_{\text{RDHL}} = \sigma_{\text{RLHD}} = g^2$ par commutativité de $\mathbb{Z}_4$. Ce n'est qu'à N_1 , après le choix de $\pm i$, que les deux parcours se distinguent, par la phase géométrique $\pm i$ qu'ils portent (section 6). Le nom donné à chaque sens (RDHL constructive, $+i$; RLHD dissipative, $-i$) est une convention, que N_1 montre inobservable.

5.7 Architecture de la démonstration : trois résultats hiérarchisés.

La démonstration se déploie sur trois niveaux d'analyse, dont chacun produit un *résultat positif*, non une promesse à honorer dans un article futur.

- **À N_{-1} : Sélection combinatoire stricte et indistinguabilité.** Un seul critère combinatoire (C1, code de Gray) sélectionne exactement deux 4-cycles parmi les 24 permutations : les orbites (1) et (3), identifiées à RDHL (g) et RLHD (g^{-1}). Les critères C2 et C3 n'ajoutent aucune restriction : ils sont des conséquences de C1 (voir ci-après). Aucun invariant *symétrique* de N_{-1} ne distingue ensuite les deux orbites, la primitive orientée δ , elle, les distingue (§3.2) : l'indistinguabilité *par les grandeurs symétriques* est démontrée (section 5.7).
- **À N_0 : Non-distinction opératoire (conséquence de l'abélianité).** En étendant les g^k en unitaires de $\mathbb{C}^4$, les compositions σ_{RDHL} et σ_{RLHD} coïncident en g^2 (remarque 16). Mais cette coïncidence n'a rien de spécifique : elle vaut pour les vingt-quatre ordres possibles des quatre opérateurs et n'est qu'une reformulation de la commutativité de $\mathbb{Z}_4$. Elle ne sélectionne aucune boucle ; son seul contenu est négatif. Le résultat de N_0 qui compte ici est autre : son verrou spectral, sous les prémisses P1 et P2, interdit à toute observable invariante d'orienter l'axe d'ordre, et il en déduit l'absence de dynamique.

- **À N_1 : réalisation et choix du signe (établis par l'article N_1).** La phase géométrique $\pm i$ y est réalisée comme phase du cycle, $\pm\pi/2$, sur la cellule d'aire $h/4$ d'un mode, ce qui distingue les deux boucles. Le *choix* du signe y est une convention, qu'aucune observable ne lit. Voir la section 6.

Cette hiérarchie traduit une **cohérence interne forte** : la flèche du temps, postulée absente du substrat, ne peut effectivement émerger ni à N_{-1} (indistinguabilité par les grandeurs symétriques) ni à N_0 (non-distinction opératoire, simple effet de l'abélianité), et c'est à N_1 (où la thermodynamique devient définissable) qu'elle apparaît, en parfaite cohérence avec la physique connue. Le programme ne prétend pas *dérivée* la flèche du temps d'un substrat qui en est dépourvu, un théorème élémentaire l'interdit (sous toute évolution invariante par renversement du temps, une séquence et son inverse partagent les mêmes invariants). Le signe retenu n'est ni prédit ni observable : l'article N_1 démontre qu'aucune observable interne ne le lit. Ce qui est falsifiable est ailleurs, dans l'existence d'un seul signe pour toute une composante connexe et dans la valeur $\pm\pi/2$ de la phase géométrique.

À N_{-1} : Le critère sélectif C1 et ses deux conséquences. La sélection repose en réalité sur un *unique* critère. Les deux suivants en découlent et sont conservés à titre descriptif.

- **C1 : Code de Gray (critère sélectif) :** [22] seules les orbites (1) et (3) changent un seul bit à chaque pas. La raison est structurelle : sur $\{0,1\}^2$, le graphe d'adjacence de Hamming-1 est l'unique 4-cycle 00–01–11–10 ; un 4-cycle à transition unitaire doit donc parcourir ce carré, dans l'un de ses deux sens. C1 détermine ainsi $\{(1), (3)\}$ à *lui seul* ; les quatre autres cycles font sauter deux bits et sont éliminés.
- **C2 : Involution axiale (conséquence de C1) :** une fois $\{(1), (3)\}$ fixées par C1, on a automatiquement g^2 (double NOT), la seule involution à symétrie axiale complète ($01 \leftrightarrow 10$ vertical, $00 \leftrightarrow 11$ horizontal). C2 ne retire donc aucune orbite supplémentaire ; il explicite la structure de g^2 .
- **C3 : Profil de points fixes (0,0,0,4) (conséquence de C1) :** aucun état n'est stabilisé avant la clôture complète du cycle. C'est une conséquence algébrique de C1 (via C2), non une contrainte indépendante.

Proposition 7 (Sélection combinatoire à N_{-1}).

$$\sigma \text{ satisfait } C1 \iff \sigma \text{ satisfait } C1, C2, C3 \iff \sigma \in \{(1), (3)\} \quad (65)$$

La première équivalence exprime que C2 et C3 sont des conséquences de C1 : le critère sélectif est C1 seul. Les orbites (1) et (3) correspondent à RDHL (g) et RLHD (g^{-1}). Démonstration en Annexe C.

Statut épistémologique des critères

La sélection de $\{(1), (3)\}$ repose sur le *seul* critère C1 (code de Gray) ; C2 et C3 en sont des conséquences algébriques (tables exhaustives en Annexe C), conservées pour leur valeur descriptive et non comme contraintes indépendantes. La suffisance de C1 est établie, et sa *canonicité* est *précisée* : C1 est l'unique boucle d'action de Hamming minimale, et cette minimalité est l'*unicité* des orbites primitives (atomicité du bit, raison suffisante), non une optimisation (Annexe C, propositions 16 et 17). Ne subsiste que le statut de la raison suffisante comme principe logique. La Proposition 7 reste valide indépendamment.

À N_0 : Non-distinction opératoire (conséquence de l'abélianité). L'indistinguabilité par les grandeurs symétriques, établie à N_{-1} , se prolonge à N_0 . À N_0 , les opérateurs g^k sont des unitaires de $\mathbb{C}^4$ (extensions des permutations de $\{0,1\}^2$ à l'espace des superpositions cohérentes). La non-distinction des deux boucles à ce niveau n'est pas un résultat profond : elle est la *conséquence directe de la commutativité de $\mathbb{Z}_4$* , comme le précise la remarque suivante.

Remarque 16 (Non-distinction opératoire à N_0). Comme unitaires de $\mathbb{C}^4$, les g^k sont des puissances d'un même générateur g d'un groupe abélien. Pour toute permutation π des quatre exposants,

$$\sigma_\pi = g^{\pi(4)} \circ g^{\pi(3)} \circ g^{\pi(2)} \circ g^{\pi(1)} = g^{\pi(1)+\pi(2)+\pi(3)+\pi(4)} = g^{1+2+3+4} = g^{10} = g^2, \quad (66)$$

la somme des exposants ne dépendant pas de l'ordre. En particulier $\sigma_{\text{RDHL}} = \sigma_{\text{RLHD}} = g^2$. Il faut souligner que cette égalité ne distingue en rien la paire $\{\text{RDHL}, \text{RLHD}\}$: elle vaut identiquement pour les **vingt-quatre** ordres possibles des quatre opérateurs. Ce n'est donc pas une propriété de ces deux boucles, mais une reformulation de l'abélianité du groupe. Il suit trivialement que $\sigma_{\text{RDHL}}^n(\rho_0) = \sigma_{\text{RLHD}}^n(\rho_0)$ pour tout état initial et tout n : toute fonctionnelle de l'état (entropie de von Neumann, pureté, fidélité) coïncide à chaque pas.

Remarque 17 (Portée exacte de cette non-distinction). *Ce point ne doit pas être surinterprété. À N_0 , la superposition cohérente n'ajoute aucune structure orientante à $\mathbb{Z}_4$; l'absence de distinction entre une boucle et son inverse n'y est donc que le reflet algébrique de l'indistinguabilité par les grandeurs symétriques déjà établie à N_{-1} . Aucune flèche du temps sélectionnée ne peut émerger ni à N_{-1} ni à N_0 (la graine orientée, δ , y est, mais nul invariant symétrique ne fixe un sens). Le contenu réel de cette observation est négatif (ce que N_0 ne peut pas faire), non positif : elle ne sélectionne pas RDHL, elle confirme seulement qu'aucun niveau pré-thermodynamique ne le peut.*

L'émergence à N_1 . C'est à N_1 , par le choix de $\pm i$, que les deux orbites peuvent être nommées. L'article N_1 y réalise la phase géométrique $\pm i$ sur la cellule d'aire $h/4$ d'un mode, et la forme de la dispersion n'y intervient pas (section 6). Le choix du signe effectif dans notre univers n'est, lui, pas *dérivé* dans cet article : c'est une convention, que l'article N_1 montre inobservable ; la basse entropie initiale fixe l'état de départ, non la valeur du signe. La thèse reste falsifiable au sens propre : la phase prédite vaut $|\gamma| = \pi/2$, et toute sélection qui ne reposerait que sur une grandeur achirale contredirait le théorème 5.

Indistinguabilité de RDHL vs RLHD à N_{-1} (au sens des grandeurs symétriques). Il n'existe aucun invariant symétrique distinguant les orbites (1) et (3) à N_{-1} : elles partagent le même groupe $\mathbb{Z}_4$, le même g^2 , le même profil de points fixes, la même table de Cayley à isomorphisme près. L'automorphisme $\phi(x) = \bar{x}$ les conjugue :

$$(3) = \phi \circ (1) \circ \phi^{-1} \quad (67)$$

Précision (orientation et terminologie). Les deux orbites diffèrent bien par leur orientation, enregistrée par la primitive orientée δ (§3.2) : l'une parcourt le cycle via g , l'autre via g^{-1} . Ce qu'aucun invariant symétrique (achiral) ne peut faire, c'est les départager : d'où le terme d'**indistinguabilité par les grandeurs symétriques**, à ne pas confondre avec l'indécidabilité au sens de Gödel ou Turing.

Ce résultat est positif : la distinction complexité/entropie n'est inscrite ni à N_{-1} ni à N_0 ; elle suppose l'acte de N_1 , ce qui est cohérent avec le fait que la flèche du temps thermodynamique est elle-même émergente. Postuler la distinction dès N_{-1} contredirait le programme d'émergence.

Portée épistémologique de l'indistinguabilité. Loin d'être une faiblesse du formalisme, l'indistinguabilité algébrique de RDHL et RLHD à N_{-1} est l'un des *tests de cohérence* les plus exigeants que le programme microGlobal pourrait subir, et qu'il passe. Trois aspects en éclairent la signification.

(i) Un test de cohérence ontologique. Si la flèche du temps thermodynamique (distinguait le passé (basse entropie) du futur (haute entropie)) est réellement émergente, alors aucune asymétrie temporelle ne doit pouvoir être détectée à un niveau qui précède l'émergence du temps. C'est ce que l'indistinguabilité par les grandeurs symétriques établit : à N_{-1} , où le temps n'existe pas encore, le cycle constructif et son inverse destructif sont indiscernables par tout invariant symétrique (leur orientation existe via δ , mais aucune grandeur symétrique ne la lit). S'il en allait autrement (si un invariant *symétrique* distinguait RDHL de RLHD à N_{-1}) le *sens* de la flèche du temps serait inscrit dans le substrat logique lui-même, ce qui contredirait la thèse de son émergence et reconduirait le problème de son origine à un niveau plus profond. Le résultat est donc une condition de *cohérence interne* du programme.

(ii) Une justification structurelle de la hiérarchie à trois niveaux. L'indistinguabilité de N_{-1} et l'identité opératoire de N_0 (remarque 16) ne sont pas des défauts à contourner : elles sont ce qui rend nécessaire la transition vers N_1 . Si l'on pouvait sélectionner RDHL par un invariant *symétrique* à N_{-1} , le sens de la flèche du temps serait inscrit dans le substrat logique lui-même ; si l'identité opératoire à N_0 pouvait être brisée sans introduction d'énergie, la thermodynamique elle-même deviendrait superflue. La hiérarchie est la traduction formelle du fait que la flèche du temps émerge au niveau où une racine de -1 est choisie (à l'ordre dominant, la dispersion y est linéaire), ni avant (pas de support physique), ni après (déjà supposée par la thermodynamique). La sélection s'opère au point de transition $N_0 \rightarrow N_1$.

(iii) Une falsifiabilité localisée. L'architecture identifie deux points précis où le programme pourrait être réfuté. Premièrement, si l'on découvrait un critère algébrique à N_{-1} distinguant RDHL de RLHD, l'hypothèse d'émergence tomberait ; le théorème d'indistinguabilité (section 5.7) exclut cette possibilité. Deuxièmement, si une observable de N_1 lisait le signe retenu, ou si deux régions connexes pouvaient durablement porter des signes opposés, les théorèmes de l'article N_1 tomberaient, et avec eux la place que ce chapitre donne à la sélection. En ce sens, l'indistinguabilité n'est pas un acte de modestie épistémique : c'est une localisation précise des conditions auxquelles le programme s'expose à l'épreuve. C'est ce qui distingue le présent travail d'une description ad hoc. La sélection combinatoire (Strate I, à N_{-1}) laisse deux boucles admissibles. Aucune strate ultérieure ne choisit RDHL par une grandeur : à N_0 , rien ne les sépare, et à N_1 le choix de $\pm i$ les nomme, par une convention qu'aucune observable ne lit.

La sélection par la durabilité : un principe universel. *Thèse du programme, non démontrée ici.* La durabilité fonctionnerait comme un critère de sélection naturel aux niveaux instanciés : les systèmes qui empruntent RDHL s’y renforceraient, ceux qui empruntent RLHD s’y dissoudraient (le nom de chaque sens étant une convention, article N_1). La boucle RDHL serait alors un **invariant fonctoriel** :

$$\boxed{\Phi_{j \rightarrow k}(\mathcal{L}_{\text{RDHL}}^{(j)}) \simeq \mathcal{L}_{\text{RDHL}}^{(k)} \quad \forall j < k} \quad (68)$$

préservé à tous les niveaux, du substrat logique de N_{-1} aux institutions sociales de N_4 ; aucun article de la série ne l’établit encore.

5.8 Circuits réversibles composés et architecture hiérarchique de N_{-1}

La boucle primaire RDHL se reproduit et s’organise en sous-niveaux $Ns_{-1.0}$ à $N_{-1.k}$. La distinction fonctions/systèmes établie en §2.3 s’applique : les **fonctions** ($Nf_{-1.0}$ à $Nf_{-1.4}$) sont les opérateurs ; les **systèmes** ($Ns_{-1.0}$ à $Ns_{-1.k}$) sont les entités constituées, Dit, porte, boucle, assemblages.

L’émergence de chaque sous-niveau :

- $Ns_{-1.0}$: le **Dit**, distinction primordiale, représenté formellement par $\{0,1\}$ mais ontologiquement antérieur au bit.
- $Ns_{-1.1}$: la **porte logique**, deux Dits assemblés, espace $\{00,01,10,11\}$, émergence des quatre fonctions g^1-g^4 .
- $Ns_{-1.2}$: la **boucle RDHL**, premier système auto-organisé ; intérieur délimité de l’extérieur.
- $Ns_{-1.3}$: les **assemblages de boucles**, structures d’ordre supérieur sur 3 Dits ou plus. Les portes quantiques réversibles (Toffoli [7], Fredkin [8], CR_k , identité) en sont des **réalisations illustratives à N_0** (à trois qubits pour Toffoli et Fredkin), non des structures de N_{-1} elles-mêmes.
- $Ns_{-1.k}$ pour $k \geq 4$: hiérarchies de boucles composées, jusqu’au remplissage discret qui fait émerger N_0 .

L’instanciation de $Nf_{-1.4}$ est le seuil exact de la transition vers N_0 (section 8).

Conditions d’émergence de N_0 . Trois conditions gouvernent l’émergence. L’article N_0 dit comment il les remplit.

1. **Un seuil critique.** Pour un site, le seuil est le tour complet des quatre configurations, atteint dès la première traversée (théorème de saturation de l’article N_0) : aucune accumulation n’est requise dans un site. Pour le réseau, l’article N_0 calcule un seuil de l’ordre, $J_c = 0,3395 \pm 0,0005$, au-delà duquel le vide s’ordonne (calculé).
2. **Un attracteur.** $\mathcal{L}_{\text{RDHL}}^{(k)}(\mathcal{A}_k^*) \simeq \mathcal{A}_k^*$, analogue d’une brisure de symétrie spontanée. L’article N_0 le réalise par son vide ordonné, qui choisit l’un des deux appariements courts du grain (calculé). Ce choix est un tirage figé, et il ne touche pas l’orientation $\pm i$.
3. **Une métrique discrète.** L’article N_0 la réalise par l’arène, la triangulation de Delaunay du réseau cubique centré, dont tous les grains sont le même tétraèdre et dont les déficits de Regge s’annulent (platitude démontrée, choix de l’arène posé comme prémisses). La forme invariante y reste de signature indéterminée ; la signature lorentzienne vient de N_1 , et la limite continue $(M, g_{\mu\nu})$ n’est pas construite.

L’ancrage des corrélations logiques dans des interactions physiques reste une hypothèse du programme. Ce que l’article N_0 établit est plus étroit et plus sûr : une face partagée par deux grains porte exactement un bit d’intrication ($\ln 2$), et elle n’est pas factorisable.

5.9 Le principe de récursivité de R : l’identité émergente comme invariant trans-scalaire

Principe de récursivité de R

Le **capital émergent** de chaque niveau N_n est le capital de la fonction R de ce niveau :

$$\mathcal{C}_R(N_n) \xrightarrow{\mathcal{F}_{n \rightarrow n+1}} \mathcal{C}_R(N_{n+1}) \quad (69)$$

Niveau	Capital R	Loi de transition	Ce qui émerge
N_{-1}	Discernabilité $\mathcal{D}$	Foncteur $\hat{\mathcal{H}}$	Espace-temps et information
N_0	Information (qubit)	$\kappa_1 = k_B T$ (Landauer)	Énergie
N_1	Énergie (quantum de champ)	$\kappa_2 = c^2$ (Einstein)	Masse
N_2	Masse (identité de particule)	$\kappa_3 = c^4/G$	Structure spatiale
N_3	Forme topologique	$\kappa_4 = k_B T \ln 2$	Symbole
N_4	Symbole	:	:

Table 4: Principe de récursivité de R (hypothèse) : lois de transition établies empiriquement ; leur interprétation comme liant les capitaux R adjacents est la thèse à vérifier aux niveaux N_1 – N_2 .

Ce principe découle du rôle de $R = g^1$ comme générateur de $\mathbb{Z}_4$: D, H, L sont engendrés par R et en sont les conditions de possibilité. À chaque niveau, R ouvre l'espace des possibilités pour les trois autres fonctions.

La transition $N_1 \rightarrow N_2$ illustre le principe : $E = mc^2$ transforme l'énergie (capital R de N_1 , onde sans masse) en masse (capital R de N_2 , particule localisée). Les quatre propriétés se répartissent sur deux axes : **quantitatif** (R : masse, H : charge, scalaires continus) et **qualitatif** (D : couleur, L : spin, propriétés catégorielles discrètes).

Remarque 18 (Ordre d'émergence et ordre d'accès). *La récursivité de R se lit dans deux sens opposés, qu'il importe de ne pas confondre. Dans le sens de l'émergence (ontologique), le capital remonte $N_{-1} \rightarrow N_0 \rightarrow \dots \rightarrow N_4$: le substrat précède la matière, qui précède le sens. Mais l'accès d'un sujet à ses propres niveaux suit le chemin inverse. Un système ne prend conscience symbolique de ses niveaux fondateurs qu'une fois parvenu au niveau du signe (N_4) : la pensée réflexive est une **redescente**, le sommet de la pile se retournant pour se représenter sa propre base. C'est pourquoi toute description où une conscience « parcourrait d'avance » les niveaux décrit en réalité une simulation $N_4 \rightarrow N_{-1}$, et non l'émergence $N_{-1} \rightarrow N_4$ qu'elle dépeint. Loin d'être une faiblesse, cette inversion est une conséquence du principe : la conscience est la boucle réflexive par laquelle le niveau du signe modélise les niveaux qui l'ont rendu possible. On parle avant de pouvoir penser la phonologie, on lit avant de savoir ce qu'est un graphème : la conscience des fondations est un acquis tardif et descendant, jamais le point de départ.*

Le **rapprochement cosmologique** est souvent invoqué à l'appui du principe : les interactions se séparent après le Big Bang dans un ordre *compatible* avec RDHL, mais avec une réserve essentielle, à savoir que les deux dernières, électromagnétisme et force faible, n'apparaissent pas successivement : elles émergent *simultanément* de la brisure électrofaible (vers $t \sim 10^{-12}$ s), comme le montre d'ailleurs l'égalité des temps ci-dessous. Le rapprochement est donc heuristique, non un ordre strict :

$$\underbrace{R}_{\text{Gravitation } t \sim 10^{-43} \text{ s}} \rightarrow \underbrace{D}_{\text{Force forte } t \sim 10^{-36} \text{ s}} \rightarrow \underbrace{\{H, L\}}_{\text{EM + faible (électrofaible) } t \sim 10^{-12} \text{ s, simultanés}} \quad (70)$$

Portée et limites

Analogie heuristique compatible (sauf pour la simultanéité EM/faible) avec $\mathbb{Z}_4$, le Modèle Standard et la cosmologie, non une dérivation. Elle reste **falsifiable** : si une loi de transition ne reliait pas les capitaux R adjacents, le principe tomberait. Toute dérivation formelle appartiendrait aux niveaux N_1 et N_2 .

5.10 Invariants et symétries de N_{-1}

Les invariants sont les **précurseurs logiques** des lois de conservation : à toute symétrie des transformations réversibles correspond un invariant logique qui, à l'émergence de N_0 , apparaîtra comme loi de conservation physique. Ils forment aussi la **mémoire structurelle** de N_{-1} , assurant la continuité à travers les niveaux.

Les invariants se répartissent en deux strates : **Strate A** (universels, découlent de la bijectivité commune) et **Strate B** (sélectifs, découlent des propriétés propres à chaque opérateur).

5.10.1 Strate A : invariants universels du groupe G_k

Invariant A.I : Réversibilité structurelle. Toutes les transformations durables sont des bijections :

$$\forall \varphi \in G_k \text{ durable} : \quad \varphi \text{ bijection, } \exists \varphi^{-1} \quad (71)$$

Nécessité ontologique : sans énergie, aucun effacement ne peut être payé (Landauer-Bennett). La bijectivité conserve la discernabilité totale $\mathcal{D}_{\text{tot}}$.

Projection :

$$\underbrace{\varphi \text{ bijective}}_{N_{-1}} \xrightarrow{\hat{\mathcal{H}}} \underbrace{\hat{U}^\dagger \hat{U} = \mathbf{1}}_{N_0: \text{unitarité}} \xrightarrow{\hat{\mathcal{H}}_1} \underbrace{dE_{\text{tot}}/dt = 0}_{N_1: \text{conservation énergie}} \quad (72)$$

Invariant A.II : Clôture du groupe. $\forall \varphi, \psi \in G_k : \varphi \circ \psi \in G_k$. Le système est auto-consistant ; tout processus est en principe annulable. Projection : **permanence des lois physiques** à N_0 (le groupe unitaire $U(\mathcal{H})$ est clos).

5.10.2 Strate B : invariants spécifiques aux opérateurs

Avertissement. Les « projections » listées ci-dessous sont des **analogies heuristiques** : elles mettent en regard une propriété algébrique de N_{-1} et une loi de conservation physique, sans établir de lien dérivé. Certaines relèvent du rapprochement de mots plus que de structure (en particulier l'association à $SU(3)$ et à CPT, signalée à chaque occurrence). Aucune n'a valeur de démonstration.

Invariant B.I : Involutivité de D . $D \circ D = L$: D est son propre inverse. La porte de Fredkin conserve le poids de Hamming $w_H(x) = \sum_i b_i$, engendrant aussi un invariant de parité d'application (nombre quantique discret).

Projection (analogie heuristique, à manier avec prudence : $SU(3)$ est non abélien à huit paramètres, sans lien structurel avec une involution $\mathbb{Z}_2$) : rapprochement avec la **conservation de la couleur $SU(3)$** à N_2 ; sélectif : quarks et gluons uniquement.

Invariant B.II : Dualité $H = R^{-1}$. $R \circ H = H \circ R = L$: la charge logique $q = n_R - n_H$ est un invariant cyclique ($\Delta q|_{\text{cycle RDHL}} = 0$).

Projection (analogie heuristique) : rapprochement avec la **conservation de la charge électrique $U(1)$** ; sélectif : particules chargées uniquement.

Invariant B.III : Identité de L . $L \circ X = X \circ L = X$: tout ce que L gouverne est conservé par définition. Le nombre N_L d'entités en état de Liaison est invariant.

Projection (analogie heuristique) : rapprochement avec les **nombre leptonique et baryonique ; statistique quantique** (Pauli : exclusive pour fermions, inclusive pour bosons) ; sélectif : fermions.

Invariant B.IV : Absence d'invariant local de R . R n'est pas involutif, n'est pas son propre inverse, n'a aucun point fixe. En tant que générateur pur, R ne possède aucun invariant algébrique propre au-delà de la bijectivité.

Projection (analogie heuristique) : rapprochement avec le **caractère non conservé de la masse** — une grandeur universelle, portée par tout objet, et qui n'obéit à aucune loi de conservation sélective, à la différence de la couleur ou de la charge.

L'énoncé porte sur cette absence, non sur le champ qui engendre la masse. L'article N_1 établit que le mécanisme de Higgs est l'*agent* de la fonction L , ce qui répond à la question « quelle fonction ce champ réalise-t-il ? » ; le présent invariant répond à une autre question, « pourquoi la masse n'est-elle conservée par rien ? », et la réponse est l'absence d'invariant local de R . *Les deux énoncés ne portent pas sur le même objet, et aucun des deux n'a besoin de céder.*

Invariant B.V : Non-commutativité. Les opérations primitives NOT et XOR de $N_{s-1,0}$ ne commutent pas : $\text{NOT}_{b_0} \circ \text{XOR}(b_1, b_0) \neq \text{XOR}(b_1, b_0) \circ \text{NOT}_{b_0}$.

Projection (établie à N_0 et à N_1) : à N_0 , l'algèbre $\mathfrak{su}(2)$ des commutateurs, donc les trois générateurs de la géométrie, et l'incompatibilité du canal et du volume d'un grain, sans constante de Planck ; à N_1 , la relation de Weyl des deux quadratures d'un mode et la phase $\pm i$ sur la cellule d'aire $h/4$. La valeur de $\hbar$ n'est une propriété d'aucun des deux niveaux : c'est un étalonnage.

Invariant B.VI : Parité $\mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2$. $\epsilon(g^k) = k \pmod{2}$: puissances paires (D, L (flux symétriques) et impaires (R, H) flux asymétriques). Cet invariant est préservé par tous les foncteurs d'émergence.

Projection (analogie heuristique : l'assignation de C, P, T à des opérateurs est libre ; CPT est un théorème de QFT relativiste, non une parité $\mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2$) : rapprochement avec la **symétrie CPT**, conjugaison de charge (C) inverse D ; renversement du temps (T) permute $R \leftrightarrow H$; parité (P) reflète les flux asymétriques. CPT est la préservation de ϵ à travers ces trois opérations.

5.11 Tableau de synthèse des invariants

Table 5: Architecture des invariants de N_{-1} et de leurs projections. Les projections de la Strate B sont des *analogies heuristiques*, des rapprochements de propriétés, non des dérivations (voir avertissements au fil du texte).

St.	Inv.	Propriété à N_{-1}	Projection physique	Domaine
A	A.I	Bijektivité ; $\mathcal{D}_{\text{tot}}$ conservée	Unitarité (N_0) ; conservation énergie (N_1)	Universel
	A.II	Clôture du groupe G_k	Permanence des lois physiques	Universel
B	B.I	Involutivité de D ; poids de Hamming	Conservation couleur SU(3)	Quarks/gluons
	B.II	Dualité $H = R^{-1}$; flux net conservé	Conservation charge U(1)	Particules chargées
	B.III	Identité L ; coprésence ; $\Delta N_L = 0$	N_ℓ, N_B ; statistique quantique	Fermions
	B.IV	Absence invariant local de R	Non-conservation de la masse : universelle, sans loi de conservation sélective — <i>et non le champ qui l'engendre</i> , que N_1 rattache à L	Tout objet massif
	B.V	Non-commutativité primitive	Relations d'incertitude	Tout système quantique
	B.VI	Parité $\mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2$	Symétrie CPT	Toute théorie des champs

Dans le cadre de ces analogies, on peut *suggérer* que l'universalité ou la sélectivité d'une loi de conservation reflète le niveau auquel l'invariant correspondant est inscrit dans la structure de N_{-1} . Cette lecture est interprétative : elle organise des faits connus sous un même schéma, sans les dériver.

5.12 Récapitulation : l'escalier interne de N_{-1}

Les deux chapitres qui s'achèvent ici ont suivi l'ordre *démonstratif* : du Dit à la discernabilité, des frontières aux opérateurs, des opérateurs à la boucle et à ses invariants (figure 1). Cet ordre n'est pas celui du *déploiement* du substrat. N_{-1} n'est pas monolithique : il se développe en une échelle de sous-niveaux $N_{s-1,0}, N_{s-1,1}, \dots$, chacun appliquant les opérateurs aux structures engendrées par le précédent, jusqu'au seuil de N_0 . La figure 16 rassemble ce déploiement, palier par palier, et indique ce que chacun apporte ; le détail formel de chaque palier figure en annexe F.

Deux traits méritent d'être lus sur cette figure, car ils commandent la portée de l'article. Le premier est la **cumulativité** : chaque palier ne juxtapose pas de nouvelles structures, il applique la même grammaire aux produits du palier précédent, et c'est en ce sens précis que la propriété fractale du modèle est ici rigoureuse et non analogique. Le second est la **réserve qui subsiste**, et mieux vaut l'afficher que la laisser découvrir : les quatre paliers sont construits, cohérence de phase comprise (§5.13), mais le franchissement vers N_0 repose ici sur la minimisation des contraintes (§8.4). L'article N_0 en donne une justification structurelle : le site est saturé dès le premier tour, un bit de plus est exclu, et des sites juxtaposés fragmentent la saturation en secteurs disjoints, de sorte que relier les sites est la seule issue. Le bilan critique reprend cette gradation.

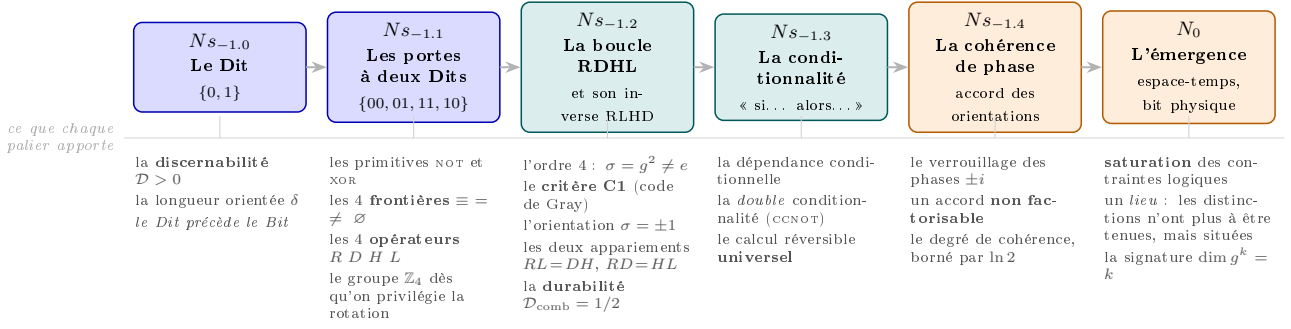


Figure 16: **L'escalier interne de N_{-1} , palier par palier.** En haut, les sous-niveaux $N_{-1,k}$ (annexe F), du Dit jusqu'au seuil de N_0 ; en dessous, ce que chacun apporte. Le mouvement est *cumulatif* : chaque palier applique les opérateurs aux structures engendrées par le précédent, et la fermeture d'un palier ouvre le suivant. Cette figure est complémentaire de la figure 1 : celle-ci donne l'ordre démonstratif de l'article, celle-là l'ordre de déploiement du substrat. *Une réserve subsiste, et une seule* : les quatre paliers sont construits, la cohérence de phase comprise (§5.13), mais le franchissement vers N_0 repose ici sur la minimisation des contraintes ; l'article N_0 le justifie par la saturation du site, relier les sites étant la seule issue. *Sur les primitives* : SWAP, qui engendre D_4 avec les deux NOT, n'est pas une primitive supplémentaire mais un composite, décomposable en trois XOR (annexe F) ; les primitives irréductibles restent NOT et XOR, dont la non-commutation fonde l'invariant B.V.

5.13 La cohérence de phase, construite : ce que produit le partage d'un Dit

Le palier $N_{-1,4}$ se construit à partir de ressources déjà établies : le Dit comme frontière, la parité de l'Invariant B.VI, et la nécessité algébrique du corps $\mathbb{C}$. Aucun recours à l'analogie avec la cohérence ondulatoire n'est requis.

5.13.1 Le point de départ : un Dit partagé est un Dit

À $N_{-1,3}$, les assemblages se construisent par application des opérateurs aux structures du palier précédent. Deux assemblages A et B peuvent alors **partager des Dits** — c'est même le cas générique, puisque rien n'oblige les assemblages à être disjoints.

Or un Dit n'est pas une propriété d'un côté : c'est une frontière $\mathcal{A} | \mathcal{B}$, qui n'appartient ni à l'un ni à l'autre (§3.1). Un Dit partagé par deux assemblages est donc **un seul objet**, non deux Dits qui se ressembleraient. Il s'ensuit immédiatement que l'espace des configurations jointes n'est *pas* le produit cartésien :

$$\Omega_{A \cup B} \neq \Omega_A \times \Omega_B, \quad \text{mais} \quad \Omega_{A \cup B} = \Omega_A \times_{\Omega_D} \Omega_B, \quad (73)$$

produit fibré au-dessus de l'espace Ω_D des configurations du Dit partagé. C'est la seule hypothèse de cette construction, et elle n'est qu'une reformulation de ce que le Dit est.

5.13.2 Ce sur quoi deux assemblages s'accordent : la classe de parité

Reste à dire *sur quoi* les deux assemblages doivent s'accorder. La réponse est fournie par l'Invariant B.VI. L'homomorphisme de parité

$$\epsilon : \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_2, \quad g^k \longmapsto k \bmod 2 \quad (74)$$

sépare $\{D, L\}$ (pair) de $\{R, H\}$ (impair).

Il importe de dire exactement ce que cette parité fait et ce qu'elle ne fait pas, car une formulation trop rapide entrerait en conflit avec le théorème 5. Sur les caractères $\chi_j(g^k) = i^{jk}$ de $\mathbb{Z}_4$, l'homomorphisme ϵ se réalise comme $(-1)^k$, c'est-à-dire comme le caractère χ_2 , l'unique caractère d'ordre deux — et non comme les caractères *fidèles* $\chi_1(g) = i$ et $\chi_3(g) = -i$. Or χ_2 est **achiral** : $\chi_2(g^{-1}) = -1 = \chi_2(g)$. La parité est donc *aveugle* à l'orientation, et elle doit l'être : R et H appartiennent l'un et l'autre à la classe impaire, de sorte que les séparer par ϵ est impossible. Ce sont les caractères fidèles χ_1 et χ_3 qui portent l'orientation, et la conjugaison complexe les échange.

Pourquoi cette précision renforce le résultat

L'accord sur un Dit partagé porte donc sur une donnée **achirale**, et c'est exactement ce qu'il fallait. Si deux assemblages devaient s'accorder sur une donnée **chirale**, cet accord constituerait un invariant séparant les deux boucles, en contradiction avec le théorème 5. La cohérence de phase construite ci-dessous est ainsi la plus forte corrélation que le substrat autorise *sans* fuite d'orientation : elle lie deux assemblages sur leur parité, non sur leur sens de parcours. C'est aussi ce qui la rend transmissible à N_0 , où l'article consacré à ce niveau la retrouve comme dichotomie fermion/boson, elle-même indifférente à toute flèche.

L'accord sur un Dit partagé est donc un accord de parité :

$$H := \{(a, b) \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \mid \epsilon(a) = \epsilon(b)\}, \quad |H| = 8, \quad (75)$$

sous-groupe d'indice 2. *Partager un Dit divise donc par deux l'espace des configurations jointes* — c'est le contenu combinatoire exact de l'énoncé « un Dit partagé est un Dit ».

5.13.3 Le théorème : la superposition des orientations interdit la factorisation

Sur $\mathbb{C}$ — facteur de la décomposition de $\mathbb{R}[\mathbb{Z}_4]$, algèbre semi-simple par le théorème de Maschke, $\mathbb{R}[\mathbb{Z}_4] \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{C}$; et *sous l'enveloppe linéaire, qui est l'acte de N_0* : ce résultat en dépend, emprunt montant déclaré et licite — un état joint s'écrit M_{ab} , nul dès que $a + b$ est impair. En regroupant les indices pairs puis impairs, M devient bloc-diagonale :

$$M = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}, \quad X, Y \text{ de taille } 2 \times 2, \quad \text{rang}(M) = \text{rang}(X) + \text{rang}(Y). \quad (76)$$

X est le secteur (pair, pair), Y le secteur (impair, impair).

Théorème 4 (Cohérence de phase par partage de Dit). *Soit un état joint de deux assemblages partageant un Dit.*

- (i) *Si un seul secteur de parité est occupé ($Y = 0$ ou $X = 0$), il existe des états **factorisables** : le rang 1 est atteint.*
- (ii) *Si les deux secteurs sont occupés ($X \neq 0$ et $Y \neq 0$), alors $\text{rang}(M) \geq 2$: **aucun état n'est factorisable**.*

Proof. Immédiat par (76) : le rang d'une matrice bloc-diagonale est la somme des rangs des blocs. Si un bloc est nul, le rang est celui de l'autre, et 1 est atteignable. Si les deux sont non nuls, chacun contribue au moins 1. $\square$

Lecture : la cohérence est la superposition des orientations

Le théorème sépare deux régimes, et cette séparation est exactement ce que le palier devait apporter.

- **Orientation définie** (un secteur) : les assemblages restent séparables. Chacun a une orientation propre, l'autre n'y change rien. C'est le régime *classique* — aucune cohérence.
- **Orientations superposées** (deux secteurs) : la factorisation devient **impossible**. Les deux assemblages ne possèdent plus d'orientation séparément ; ils n'en possèdent qu'une *ensemble*, portée par la phase relative entre les deux secteurs.

C'est la définition même de la cohérence de phase : un accord d'orientations qui ne se réduit pas à la donnée de chaque orientation. Elle ne procède d'aucune analogie avec la cohérence ondulatoire : elle est la conséquence du fait qu'un Dit partagé est un Dit, et que la parité de $\mathbb{Z}_4$ en porte l'orientation.

5.13.4 Degré de cohérence

La construction fournit en outre une *mesure*. Un état à deux secteurs de rang 1 s'écrit $c_1|u_1\rangle|v_1\rangle + c_2|u_2\rangle|v_2\rangle$ avec les vecteurs de chaque côté orthogonaux, d'où une entropie d'intrication

$$S = -|c_1|^2 \ln |c_1|^2 - |c_2|^2 \ln |c_2|^2 \in (0, \ln 2], \quad (77)$$

maximale à $\ln 2$ pour $|c_1| = |c_2|$. **Le degré de cohérence est le déséquilibre entre les deux secteurs de parité**, et il vaut au plus un bit — ce qui est cohérent avec le fait que le Dit partagé est une unité binaire.

5.13.5 Ce que cette construction change, et ce qu'elle ne change pas

Statut du palier $N_{s-1.4}$

Construit : la non-factorisabilité, son critère exact (occupation des deux secteurs de parité), et son degré (borné par $\ln 2$). Les ingrédients sont le Dit comme frontière, l'Invariant B.VI et le corps $\mathbb{C}$ — tous établis avant ce palier. Les quatre paliers de N_{-1} sont ainsi construits, et le franchissement vers N_0 est justifié dans l'article N_0 par la saturation du site, relier les sites étant la seule issue.

Non construit : les réalisations physiques citées en annexe (CR_k , i SWAP, QFT) restent des instanci-ations à N_0/N_1 des structures logiques de ce palier, et non des objets de N_{-1} .

Remarque 19 (Une symétrie de l'escalier). *La construction ci-dessus reproduit, un niveau plus bas, la structure qui gouverne N_0 : un objet partagé y est un objet, l'espace joint est un produit fibré, et la contraction qui en résulte interdit la factorisation. Le palier $N_{s-1.4}$ n'est donc pas un ajout à l'escalier : c'est la première apparition d'un mécanisme qui se répétera. Cela renforce la thèse de cumulativité énoncée en §5.12 — chaque palier applique la même grammaire aux produits du précédent — puisque le mécanisme lui-même se transmet.*

6 Programme pour N_1 : de l'indistinguabilité à la phase géométrique

Statut et logique de ce chapitre

Ce chapitre est **programmatique et volontairement sommaire** : il expose la *logique* de la sélection effective à N_1 , que l'article consacré à ce niveau développe formellement. La démarche tient en trois temps : (i) un verrou, aucune *grandeur* ne peut séparer les deux boucles ; (ii) une clé ; elles ne diffèrent que par un *signe*, porté par une phase géométrique ; (iii) une réalisation, ce signe devient à N_1 une phase de Berry physique. Sont définitives ici la non-distinction de RDHL et RLHD à N_{-1} et N_0 et l'existence des deux boucles miroir distinguées par $\pm i$. L'article N_1 établit la réalisation (la phase géométrique $\pm\pi/2$ sur la cellule d'aire $h/4$ d'un mode) et montre que le signe retenu est une convention inobservable.

6.1 Le verrou : aucune grandeur ne sépare les deux boucles

À N_0 , rien ne sépare non plus les deux boucles : l'article N_0 le démontre par une voie spectrale, sous deux prémisses (la conjugaison n'est pas brisée, et les observables sont invariantes sous le groupe du niveau). Lever ce verrou demanderait de choisir une racine de -1 , c'est-à-dire d'accomplir l'acte de N_1 . On pourrait espérer qu'un ajout caractéristique de N_1 (par exemple un couplage à un bain qui mémorise les états visités, et la production d'entropie qui l'accompagne) suffise à départager les boucles. Il n'en est rien, et l'obstruction est structurelle.

Théorème 5 (Verrou achiral). *Les deux boucles sont conjuguées par l'inversion $\phi : g \mapsto g^{-1}$ (réalisée sur les états par la transposition des bits $\psi : b_0 \leftrightarrow b_1$, qui fixe 00, 11 et échange 01, 10 ; on vérifie $\psi g \psi^{-1} = g^{-1}$), et le poids combinatoire $\mathcal{V}$ est invariant par inversion ($\mathcal{V}(g^1) = \mathcal{V}(g^3)$), sa transformée de Fourier $\hat{\mathcal{V}}[1]$ étant réelle). Par conséquent, sur la période de la dynamique ($\sigma = g^2$ étant d'ordre 2), toute fonctionnelle achirale (c'est-à-dire invariante par renversement du temps, l'entropie d'occupation d'un bain comprise) attribue la **même valeur** aux deux boucles. Aucune grandeur de ce type ne peut donc orienter la sélection.*

Vérification, script `verif_Nm1.py`, bloc G, H. La durabilité combinatoire vaut $1/2$ et elle est *identique* pour les deux orbites ; et la grandeur T -impaire élémentaire, $\langle [A, B] \rangle$, est imaginaire pure — elle n'est réelle qu'après choix de i , les deux choix donnant des valeurs opposées. $\square$

Ce théorème ferme définitivement la voie des magnitudes (entropie, chaleur dissipée, action) au niveau combinatoire : ce sont des quantités T -paires, structurellement aveugles à l'orientation. La primitive orientée δ (§3.2), elle, *départage* les deux orbites, mais parce qu'elle est **chirale** (T -impaire, non invariante par l'inversion $\phi : g \mapsto g^{-1}$), non une fonctionnelle achirale : elle échappe au verrou sans le contredire. La distinction ne peut donc être qu'*ailleurs* que dans les magnitudes, dans un *signe*, dont δ est la graine à N_{-1} et la phase géométrique $\pm i$ l'expression sur le plan de phase.

Pour le lecteur : deux sens indiscernables

Imaginons qu'on parle par radio avec quelqu'un de très lointain, qui ne voit rien de ce que nous voyons (aucun objet commun, aucune étoile commune). On peut lui décrire un carré, un cercle, lui donner des nombres, des longueurs, des angles. Mais comment lui dire ce qu'est « la gauche » ? Tout ce qu'on peut lui transmettre (longueurs, angles, nombres) est le même pour un objet et pour son image dans un miroir.

Martin Gardner a appelé cela le *problème d'Ozma* : sans repère commun, gauche et droite ne se distinguent pas par une description.

Les deux boucles de Gray sont dans la même situation. L'une fait $00 \rightarrow 01 \rightarrow 11 \rightarrow 10 \rightarrow 00$, l'autre le même tour en sens contraire. Échanger les deux bits ($01 \leftrightarrow 10$, tandis que 00 et 11 restent en place) transforme l'une en l'autre : c'est un miroir (figure 17). Toute grandeur qui ne dépend pas du sens de parcours (nombre de pas, nombre de bits changés, entropie) donne donc la même valeur aux deux boucles. C'est le *verrou achiral* : « achiral » qualifie une mesure qui ne voit pas la différence entre un objet et son image dans un miroir.

Ce qui sépare les deux boucles n'est donc pas une quantité, mais un sens de parcours, c'est-à-dire un signe : + pour l'une, - pour l'autre (c'est la phase $\pm i$). Et, comme pour la gauche au téléphone, décider laquelle reçoit le + est une convention.

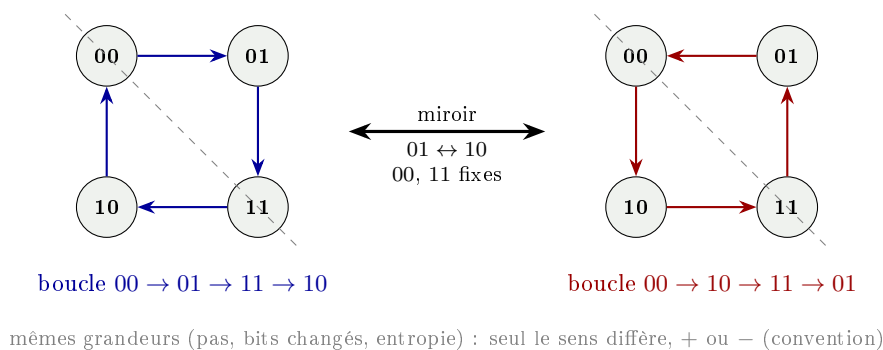


Figure 17: Les deux boucles de Gray sont images miroir l'une de l'autre. Échanger les deux bits ($01 \leftrightarrow 10$, 00 et 11 fixes) revient à refléter le carré par rapport à sa diagonale 00–11 (tiretés) : la boucle de gauche devient celle de droite, parcourue en sens contraire. Une mesure qui ne dépend pas du sens leur donne la même valeur ; seul un signe les sépare, et le choix du + est une convention.

6.2 La clé : un signe, porté par une phase géométrique

Les deux boucles ne diffèrent que par l'*orientation* du parcours de Gray, une quantité T-impaire. Sur le plan de phase de Weyl associé aux bits (b_0, b_1) (dont la structure non-commutative $ZX = iXZ$ est exactement la non-commutativité NOT/XOR du substrat) cette orientation se lit comme une *phase géométrique discrète*.

Proposition 8 (Phase géométrique de l'orbite de Gray). *Le produit ordonné des déplacements de Weyl le long de l'orbite de Gray vaut une phase pure $i^{\mathcal{A}}$, où $\mathcal{A} = \pm 1$ est l'aire orientée enclose :*

$$e^{i\gamma} = i^{\mathcal{A}} = \pm i, \quad \gamma = \pm \frac{\pi}{2}. \quad (78)$$

L'orbite de g (RDHL, sens trigonométrique) porte $+i$; celle de g^3 (RLHD, sens horaire) porte $-i$. Cette phase est gauge-invariante (invariant de Bargmann) et change de signe avec l'orientation. Démonstration et vérification numérique en Annexe B.

C'est parce qu'elle est T-impaire que la phase réussit là où l'entropie échoue (théorème 5) : elle lit le *signe* de la chiralité, non une magnitude (dont les valeurs coïncident, $|+i| = |-i| = 1$).

Pour le lecteur : l'aire comptée avec un signe

Prenons un carré de côté 1 et faisons-en le tour en partant d'un coin. On peut tourner dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (le sens dit trigonométrique) ou dans le sens des aiguilles. Dans les deux cas le chemin mesure 4 et entoure une surface de 1. Pourtant ce ne sont pas les mêmes tours, comme un manège qui tourne vers la gauche n'est pas un manège qui tourne vers la droite.

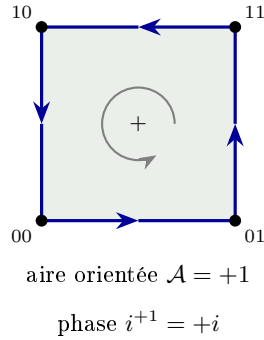
Pour garder cette différence, on compte l'aire avec un signe : +1 quand on tourne dans le sens trigonométrique, -1 dans l'autre sens. C'est l'*aire orientée* ; elle voit le sens du tour, que la longueur et l'aire ordinaire ne voient pas.

La boucle de Gray fait exactement ce tour. Ses quatre états 00, 01, 11, 10 sont les quatre coins du carré, et un seul bit change à chaque pas, de sorte que le chemin suit les côtés (figure 18). La boucle RDHL tourne dans un sens, son inverse RLHD dans l'autre. Le calcul de l'annexe B associe alors à chaque boucle le nombre $i^{\mathcal{A}}$, où $\mathcal{A}$ est l'aire orientée et i le nombre dont le carré vaut -1 (multiplier par i revient à tourner d'un quart de tour) : $i^{+1} = +i$ pour RDHL, $i^{-1} = -i$ pour RLHD. C'est la phase géométrique.

Ce calcul suppose qu'on ait le droit d'additionner des états, c'est-à-dire de les superposer, et ce droit est l'acte de N_0 . Lequel des deux sens reçoit le signe $+$ est une convention, car N_1 montre qu'aucune observable ne lit ce choix. Ce qui est établi, c'est que les deux boucles reçoivent des signes opposés.

En une phrase : deux boucles identiques en tout, sauf le sens du parcours, ne se séparent que par le signe de l'aire qu'elles entourent.

RDHL : sens trigonométrique



RLHD : sens horaire

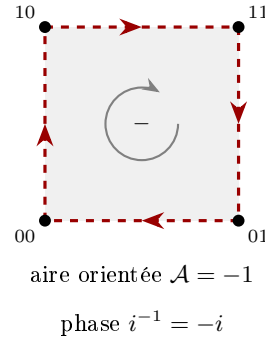
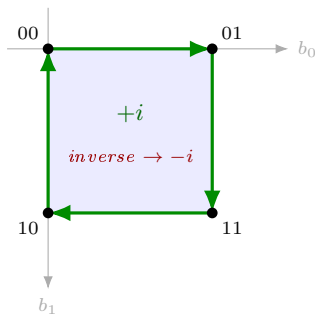


Figure 18: Le même carré parcouru dans les deux sens. Les quatre coins sont les états de la boucle de Gray (un seul bit change par côté). La surface entourée vaut 1 dans les deux cas ; comptée avec le signe du sens de parcours, elle vaut $+1$ (à gauche, trait plein) ou -1 (à droite, trait tireté), et la phase géométrique vaut $+i$ ou $-i$. L'attribution du $+$ à RDHL est une convention.

Cette logique a un précédent thermodynamique exact, le cycle de Carnot (figure 19). Un moteur et son inverse, le réfrigérateur, ne se distinguent pas par l'entropie (pour un cycle réversible idéal, la variation d'entropie de l'univers est nulle dans les deux sens) mais par le *signe* de l'aire orientée enclose $\oint T dS = W$, qui est le travail. C'est la même structure que celle du substrat : une boucle et son inverse, identiques en magnitude, séparées par le signe d'une aire orientée, le travail W pour Carnot, la phase géométrique $\pm i$ pour l'orbite de Gray.

(a) cellule de Gray ($\mathcal{A} = +1$)



(b) cycle de Carnot (moteur)

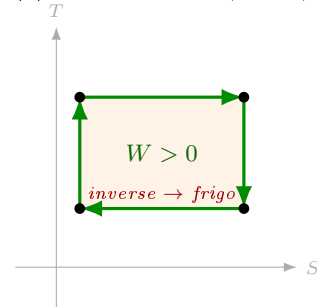


Figure 19: **Le sens de la boucle, et son analogie de Carnot.** À gauche, l'orbite de Gray sur le plan de phase (b_0, b_1) : parcourue dans le sens trigonométrique (RDHL, orbite de g), elle enclôt une aire orientée $\mathcal{A} = +1$ et porte la phase géométrique $+i$; son inverse (RLHD, orbite de g^3) porte $-i$. À droite, le cycle de Carnot dans le plan (S, T) : parcouru dans un sens, c'est un moteur ($W = \oint T dS > 0$) ; dans l'autre, un réfrigérateur ($W < 0$). Le parallèle est exact : dans les deux cas, la boucle et son inverse partagent toutes leurs *grandeurs* achirales (pour le cycle réversible de Carnot, la variation d'entropie de l'univers est nulle dans les deux sens) et ne sont distinguées que par le *signe* de l'aire orientée enclose (le travail W pour Carnot, la phase géométrique $\pm i$ pour Gray), une quantité T-impaire. Le sens absolu est conventionnel ; ici le plan de Gray est tracé avec b_1 vers le bas, afin d'aligner visuellement le sens des deux boucles.

6.3 La réalisation à N_1 : une phase de Berry

À N_1 apparaissent l'énergie, la fréquence et la propagation : le degré de liberté devient une *onde*, dotée d'une relation de dispersion. L'article N_1 montre que la phase de la boucle n'en dépend pas : elle se réalise sur la cellule d'aire $h/4$ d'un mode, et la dispersion est linéaire à l'ordre dominant.

Proposition 9 (La dispersion est une lecture de l'acte (établie à N_1)). À chaque opérateur g^k correspond une durée $\tau_k = \tau_0 \mathcal{V}(g^k)$ et une phase $\Phi_k = \tau_0 \mathcal{V}(g^k) \omega(\theta)$. La relation de dispersion ω n'est pas un ingrédient supplémentaire de N_1 : elle est la forme que prend, dans le registre ondulatoire, l'unique acte qui constitue le niveau — l'orientation de l'axe τ . Une fois cet acte posé, le générateur temporel peut être non nul (sur un grain, $-i(aP_1 + bP_3)$ devient admissible), et ω se lit sur le spectre de l'évolution ainsi ouverte. La contrainte sur les états du tout, $\hat{H}|\Psi\rangle = 0$, demeure à N_1 , où la dynamique est relationnelle.

Statut. Établie à N_1 : la relation de dispersion s'y reconstruit à partir de la seule racine, sans reste, à l'ordre dominant.

Un dictionnaire, pour la lecture à N_1 . Le plan (b_0, b_1) de l'orbite de Gray y devient celui des quadratures d'un mode : b_0 joue la position, b_1 l'impulsion. Ce dictionnaire est une convention : le signe d'ensemble de la phase dépend de l'orientation choisie pour la forme symplectique, et ce qui est invariant est l'opposition des deux phases.

Proposition 10 (Réalisation comme phase de Berry (établie à N_1)). Le $\pm i$ de la proposition 8 se réalise à N_1 comme une phase de Berry. Le transport y compose les déplacements de Weyl le long du chemin, et la phase géométrique du **cycle** vaut $\pm i$, soit $\gamma_{\text{geo}} = \pm\pi/2$, sur la cellule d'aire $h/4$ d'un mode ; l'itération du générateur g ne porte que la phase dynamique ($\pm i$ par pas, 1 sur le cycle, puisque $g^4 = e$). N_{-1} seul ne départage pas ces deux transports : le choix du transport appartient à N_1 (§B). Cette phase est indépendante de la dispersion, puisqu'elle est géométrique ; et la relation de dispersion (proposition 9) n'en est pas la cause, mais une autre lecture du même acte constitutif.

La répartition des rôles est l'aboutissement de la démarche, et elle ne comporte *qu'un* terme non dérivé. L'acte de N_1 , le choix de l'une des deux racines de -1 , est ce qui ancre la sélection à N_1 et non à N_0 , dépourvu de dynamique. L'énergie, la fréquence et la propagation ne sont pas des objets nouveaux : elles utilisent ce choix avec des acquis de N_0 (l'opérateur de lien porté par le produit fibré, la réalité des configurations). La phase géométrique $\pm i$, robuste, demeure l'invariant séparateur. Une part *dynamique* additionnelle, $\sum_k \tau_k \omega$, dépend de ω et de conventions ; elle accompagne la phase géométrique mais n'en est pas le séparateur.

6.4 Ce que N_0 transmet à N_1 : la dette exacte

Le programme pour N_1 tel qu'il vient d'être esquissé ne porte que sur un point : le signe de la phase géométrique. L'article consacré à N_0 en formule un plus large, et il faut l'enregistrer ici, faute de quoi les deux articles fixeraient à N_1 deux cahiers des charges différents.

Cet article établit que sept choses manquent à N_0 , et qu'un seul choix nouveau suffit à les lever, avec des acquis du niveau : le corps $\mathbb{C}$ y est déjà présent, mais la conjugaison complexe y est une symétrie non brisée, de sorte que $+i$ et $-i$ y restent interchangeables. Ce qui manque n'est pas le corps, c'est la **sélection d'une de ses deux racines**. Et le choix de $\pm i$, qui manque à N_0 , sert à N_1 aux sept manques : orienter le temps, fixer la signature, ouvrir les changements de repère, ouvrir le cône et donc la causalité, permettre la dynamique, convertir l'intrication unitaire en décohérence, et fixer la latéralité de l'espace. Il ne les lève pas seul : chacun l'utilise avec des acquis du niveau (la réalité des configurations, l'état initial pur, le produit fibré), et que ce soit le seul remède reste une conjecture, que l'article N_1 nomme ainsi. Ce choix a d'ailleurs deux effets distincts. Il rend possible un générateur temporel non nul, qui ne mélange pas les deux blocs de l'espace des configurations ; et il rend observables les générateurs des rotations, réalisés comme boosts, qui les mélangent. S'y ajoute une constante : le rapport libre entre le bloc temporel et le bloc spatial de la métrique, que N_0 ne peut pas fixer faute d'une grandeur convertissant l'axe τ en longueur, et qui portera le nom de c .

Un seul objet nouveau, et il est binaire

La formulation de l'article N_0 et celle du présent chapitre disent la même chose et doivent le dire dans les mêmes termes. Le « choix du signe » énoncé ci-dessus *est* la sélection d'une des deux racines de $\mathbb{C}$. En conséquence :

N_1 doit refermer les sept lacunes en introduisant **un seul** choix nouveau, et ce choix est **binaire**. Sa valeur est une convention, qu'aucune observable ne lit, mais son *unicité* ne l'est pas. L'article N_1 tient cet engagement sous une forme précise : le choix de $\pm i$ est le seul objet nouveau, et chaque manque l'utilise avec des acquis de N_0 . L'engagement serait réfuté par un second choix nouveau, non par l'usage de ces acquis ; l'exhaustivité, elle, reste une conjecture.

Une objection porte sur ce décompte : la condition initiale de basse entropie serait une seconde structure importée, ce qui, selon le critère de l'article N_0 , réfuterait l'engagement. Il n'en est rien : le signe n'est pas un objet du niveau, c'est la **valeur** conventionnelle prise par l'unique donnée binaire, et la condition initiale ne fixe que l'état de basse entropie (remarque 20). Le programme introduit un datum et n'en fixe pas la valeur ; l'univers fixe la valeur et n'introduit pas de datum. Compter deux ingrédients reviendrait à compter deux fois la même chose, une fois comme place et une fois comme contenu.

6.4.1 L'ordre entre la dispersion et le i : un seul acte

On peut demander lequel vient d'abord, de la dynamique ou du i . Deux lectures s'offrent, et la réponse tient à ce que la question est mal posée.

La lecture « dynamique d'abord ». À N_1 apparaissent l'énergie, la fréquence et la propagation ; le degré de liberté devient une onde dotée d'une relation de dispersion ; cette dynamique rendrait la boucle parcourable, et la phase de Berry $\pm\pi/2$ se matérialiserait. *La dynamique précéderait le i .*

La lecture « racine d'abord ». Aucune observable invariante de N_0 n'étant T -impaire (sous les prémisses P1 et P2 de son verrou), le générateur temporel est lui-même nul : pas de dynamique. Les grandeurs T -impaires existent pourtant — espérances de commutateurs, imaginaires pures — mais ne deviennent réelles, donc observables, qu'après division par une racine, et $+i$ et $-i$ donnent des résultats opposés. Sélectionner la racine est donc ce qui permet un générateur non nul ; la contrainte sur les états du tout, elle, demeure. *Le i précéderait la dynamique.*

Un seul acte : la question est mal posée, et le programme dit pourquoi

Ni l'un ni l'autre. **Choisir la racine, orienter l'axe τ , rendre possible un générateur non nul et nommer « énergie » son action ne sont pas quatre événements ordonnés : un seul choix nouveau y suffit.** Le contenu du générateur, lui, vient d'ailleurs : de l'opérateur de lien que porte le produit fibré, et de la réalité des configurations (article N_1).

Le motif décisif est le principe de transition lui-même. Le programme pose que $Nf_x.4 = Nf_{x+1}.0$ n'est pas une relation entre deux instances voisines mais *une seule instance lue des deux côtés*, sans intervalle, sans processus intermédiaire, sans cause externe (§8). Demander lequel du i ou de la dynamique vient d'abord, c'est postuler un « entre » à la frontière $N_0 \rightarrow N_1$ — exactement ce que ce principe interdit, et exactement la question à laquelle on répond déjà par la négative pour $Nf_{-1.4} = Nf_{0.0}$.

Il y a plus contraignant encore. Demander lequel vient d'abord suppose une relation d'ordre ; or l'ordre en question est précisément celui que ce passage *constitue*, puisque c'est là que τ reçoit son orientation. Les deux lectures présupposent donc, pour formuler leur question, la chose même que le passage produit. C'est la pétition de principe que ce travail s'interdit dès N_{-1} , où « puis » et « prépare » dénotent une dépendance logique et jamais une chronologie (§3.1). La question ne reçoit pas de réponse : elle est dissoute.

Deux vérifications le confirment.

L'ordre « dynamique d'abord » est réfuté par le comptage. Si l'énergie et la propagation étaient un capital primitif dont le i se déduirait ensuite, N_1 introduirait *deux* objets nouveaux. L'engagement rappelé ci-dessus, et pris identiquement dans l'article N_0 , exige qu'il n'y en ait qu'un, binaire. Cette lecture réfuterait donc le programme par son propre critère.

L'ordre « racine d'abord » n'est pas une position tenable. Poser la racine comme logiquement première oblige à dire où elle est choisie. Si c'est à N_0 , le verrou achiral l'interdit — et c'est toute la dette. Si c'est à N_1 , elle n'est pas antérieure à N_1 : elle est constitutive de N_1 , et l'on est revenu à l'acte unique. Il n'existe pas de troisième lieu où la loger. Cette lecture n'est donc pas une alternative mais une formulation incomplète de la précédente.

Ce qui réfuterait cette lecture

La dispersion n'habite pas la phase. La phase géométrique s'obtient de la relation de Weyl $ZX = iXZ$ (proposition 8), par un argument purement algébrique où la dispersion n'intervient pas ; la forme de ω n'entre que dans la part dynamique $\sum_k \tau_k \omega$, dont ce chapitre dit par ailleurs qu'elle n'est pas le séparateur.

Sa réfutation est précise, et il importe de l'énoncer, faute de quoi « c'est le même acte » ne serait qu'une dissolution verbale du problème. Dire que deux descriptions portent sur un seul acte n'a de contenu que si l'on passe de l'une à l'autre **sans reste** : de la sélection de la racine on doit pouvoir reconstruire la relation de dispersion, et réciproquement. **La lecture de l'acte unique est réfutée si cette reconstruction laisse un résidu non dérivable** — si ω exige une donnée que l'orientation de τ ne fournit pas. Le coût de la lecture « dynamique d'abord » reviendrait alors intégralement, avec son second objet nouveau.

La portée du critère dépasse ce passage. Il vaut pour tout niveau : une donnée que l'acte du niveau ne fournit pas, et que le niveau inférieur ne transmet pas, est un **reste** ; un résultat qui en exige un n'est pas dérivé. Les niveaux suivants l'emploient à ce titre, comme principe général du programme. L'article N_1 l'applique : le critère y est tenu pour la propagation, à l'ordre dominant, et il ne l'est pas pour l'interaction, où le rapport b/c des deux termes de l'opérateur de nœud reste un reste, déclaré comme tel.

Un bénéfice de doctrine, pour finir. Sous cette lecture, l'énergie n'est pas un second objet nouveau : elle est le nom de l'action d'un générateur que le choix de $\pm i$ rend lisible et signé. Cela s'accorde avec l'annexe I, où le capital du niveau suivant n'est jamais ajouté mais engendré par la propagation d'une discontinuité, et cela referme la série des actes non dérivés : à chaque frontière, un acte dont on montre la nécessité sans le déduire. Le passage $N_{-1} \rightarrow N_0$ a le sien, l'enveloppe linéaire (§9.4) ; le passage $N_0 \rightarrow N_1$ a le sien, le choix de l'une des deux racines de -1 . Deux frontières, deux actes, une même forme.

6.5 Le choix du signe : une convention

Remarque 20 (Le signe est une convention ; établi au niveau N_1). *L'existence de deux boucles miroir distinguées par $\pm i$ est dérivée. Le choix du signe ($RDHL \rightarrow +i$) est une convention qu'aucune observable ne lit. L'article N_1 le démontre : retourner le signe retourne ensemble le sens du temps et la main des fermions, et laisse toute observable interne inchangée. Le signe est donc une convention, au sens où la phase globale en est une. Ce que la condition initiale de basse entropie fixe (hypothèse de courbure de Weyl de Penrose [15]) est l'état de basse entropie, non la valeur du signe. Le programme est ainsi compatible avec le second principe sans prétendre le fonder.*

L'unicité du signe, démontrée à N_1

La *valeur* du signe est une convention, mais son **unicité** ne l'est pas : l'article N_1 la démontre dans la description effective, et la vérifie numériquement sur le réseau. Sur une composante connexe, une assignation non constante placerait de part et d'autre d'une arête un générateur de la forme $\hat{H}_A \oplus (-\hat{H}_B)$; la région A pourrait alors absorber sans limite, B payant à mesure, et aucune structure durable ne s'y formerait. *La seule assignation admissible est donc constante.*

Le bit unique est donc **une donnée pour toute la composante connexe**. Et l'argument respecte le théorème 5, puisqu'il ne compare pas $+i$ à $-i$ mais l'assignation homogène à l'assignation hétérogène — comparaison achirale, le retournement global échangeant les deux configurations homogènes sans rien changer à leur stabilité.

Chemins de falsification pour l'article N_1 . Quatre épreuves : (i) la prédiction est nette et falsifiable, $|\gamma_{\text{geo}}| = \pi/2$ pour la cellule $\mathbb{Z}_4$ — *sur le cycle*, le transport composant les déplacements (proposition 10) ; soit un décalage d'un quart de frange par rapport à un bras de référence sans boucle, et d'une demi-frange entre les deux sens. Tout écart mesuré différent invaliderait l'identification de la cellule de Gray avec un quart de la cellule de phase fondamentale. L'article N_1 réalise cette cellule (les deux quadratures d'un mode, aire $h/4$) : la phase $\pm\pi/2$ y est un effet connu et mesuré, de sorte que l'épreuve vérifie l'identification, sans fournir d'effet nouveau. (ii) La réalisation doit produire une observable T-impair (phase de Berry, circulation, hélicité), non une magnitude : une sélection qui ne reposerait que sur une grandeur achirale contredirait le théorème 5. (iii) La phase doit demeurer $\pm\pi/2$ indépendamment de la dispersion choisie ; une dépendance résiduelle signalerait une contamination dynamique non géométrique. (iv) La reconstruction doit se faire **sans reste** : de l'orientation de τ on doit pouvoir dériver la relation de dispersion, et réciproquement (§6.4.1). Un résidu non dérivable porterait à deux le nombre d'objets nouveaux et réfuterait l'engagement pris avec l'article N_0 .

7 Déséquilibre structurel et minimisation : le moteur de la complexification

7.1 L'équilibre comme piège logique

Un système logique à N_{-1} est en équilibre lorsque $\mathcal{L}_{\text{RDHL}}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, état où le cycle RDHL n'a plus d'effet. Cet état correspond à l'entropie logique maximale : le système a perdu toute structure différenciée, toute hiérarchie, toute capacité de reproduction. Il ne cesse pas d'exister, mais cesse d'être un système organisé.

Articulation avec le résultat $\sigma = D$. La caractérisation algébrique de l'équilibre éclaire ce qui est en jeu. Le chapitre précédent a établi que la composition dynamique de la boucle RDHL vaut $\sigma = L \circ H \circ D \circ R = D$ (équation 59), une involution non triviale. Or l'équilibre $\mathcal{L}_{\text{RDHL}}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ revient à la condition $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ pour toutes les configurations $\mathcal{A}$, c'est-à-dire à la dégénérescence de σ en l'identité effective sur l'ensemble du système. Mais $\sigma = D = g^2$ est le double-NOT (00 11)(01 10) : il est **sans point fixe** ($D \neq e$, profil (0, 0, 0, 4) établi au §5.7). La condition $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ n'a donc *aucune* solution configuration par configuration : l'équilibre statique (la dégénérescence de σ en identité effective) est **structurellement inatteignable**. C'est un résultat fort : l'absence de point fixe interdit au cycle de se figer sur une quelconque configuration ; il oscille avec période 2 ($D^2 = e$). Le seul « équilibre » disponible n'est donc pas un repos du cycle, mais l'*effondrement de l'espace des distinctions lui-même*, la perte de la diversité que les quatre phases avaient instaurée, soit l'entropie logique maximale. En ce sens, l'équilibre n'est pas un état parmi d'autres : c'est l'*extinction* de la structure, dont le déséquilibre permanent est la négation structurelle.

L'équilibre n'est pas la stabilité : c'est l'extinction. La **vraie stabilité est cinétique**, comme une roue de vélo en mouvement, plus elle tourne vite, plus elle résiste aux perturbations. Le moteur de la complexification est le **déséquilibre permanent**.

Remarque 21 (Deux (dés)équilibres à ne pas confondre). *L'« équilibre » visé ici est celui du moteur : la saturation séquentielle qui fait tourner la boucle (R engendre D , puis H , puis L), et dont l'arrêt serait l'extinction. Il est distinct d'un second équilibre, de **pondération** : le décentrage d'une boucle vers l'une de ses paires de pôles, qu'équilibrent les relations $RL = DH$ et $RD = HL$ (développées ci-après). Équilibrer ce décentrage ne passive en rien la boucle : un système peut être parfaitement centré et pleinement tournant. « Équilibre = piège » ne vaut donc que pour le moteur, jamais pour la pondération.*

7.2 Le déséquilibre comme propriété structurelle de RDHL

La boucle RDHL est, par construction, une structure de déséquilibres en cascade : chaque phase résout la tension de la précédente et en crée une nouvelle.

- **Phase R** : le flux asymétrique sortant (g^1) est institué mais pas encore différencié, tension vers D .
- **Phase D** : la polarisation maximale (g^2) crée une diversité sans hiérarchie, tension vers H .
- **Phase H** : l'ordre est établi (g^3) mais non intégré en frontière, tension vers L .
- **Phase L** : la Liaison (g^4) clôt le niveau courant et ouvre un déséquilibre *entre niveaux* : le système ne peut rester distinct de son environnement qu'en se reproduisant au niveau supérieur ($Nf_{x.4} = Nf_{x+1.0}$). C'est le déséquilibre **fondateur** : celui qui franchit une frontière de niveau.

Le mécanisme du déséquilibre fondateur. Les trois premières phases (R , D , H) opèrent toutes au sein du niveau courant : chacune résout la tension de la précédente en la transformant en une tension nouvelle, mais du même type, une tension intra-niveau, soluble par l'opérateur suivant du cycle. La phase L rompt cette logique. $L = g^4 = e$ étant l'identité, elle ne peut résoudre la tension de H par une transformation interne supplémentaire : toutes les ressources de $\mathbb{Z}_4$ ont été épuisées par R , D , H . Le seul mouvement possible pour L est donc de *clôre* le niveau et de transmettre la tension non résolue vers une instance *externe* au niveau, le niveau suivant. Formellement, c'est le mécanisme $Nf_{x.4} = Nf_{x+1.0}$: la quatrième fonction du niveau x , en tant que clôture, est numériquement identique à la fonction d'ouverture du niveau $x + 1$. La frontière entre niveaux n'est donc pas une discontinuité mais le *lieu même* où la tension non résolue se reformule à un niveau d'organisation supérieur. C'est ce qui rend le déséquilibre L *fondateur* : sans lui, la complexification s'arrêterait à un seul niveau ; avec lui, chaque cycle clos engendre la possibilité d'un cycle nouveau dans un espace plus riche. Le transfert inter-niveau n'est pas un événement contingent (c'est la conséquence structurelle de l'épuisement de $\mathbb{Z}_4$ par les trois premières fonctions) c'est, dans les termes de la remarque 13, la frontière que L *pose* sans la consommer, et que le niveau suivant viendra consommer.

La condition formelle de l'équilibre dynamique (vie logique) :

$$\frac{d\mathcal{I}_{\text{tot}}}{d\tau} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\mathcal{C}}{d\tau} > 0 \quad (79)$$

où τ est le temps logique (nombre de cycles accomplis). L'équilibre dynamique n'est pas l'absence de déséquilibre : c'est un **déséquilibre maîtrisé**, organisé en cycle.

7.3 La relation $RL = DH$: deux stratégies évolutives

Dans $\mathbb{Z}_4$:

$$\boxed{R \circ L = D \circ H} \quad (80)$$

($R \circ L = g^1 \circ g^4 = g^1$; $D \circ H = g^2 \circ g^3 = g^5 = g^1$.) Deux chemins structurellement opposés aboutissent au même point : la Reproduction. Cette relation désigne deux **stratégies évolutives fondamentalement différentes** :

Stratégie RL : l'adaptation horizontale. Reproduction puis Liaison immédiate, différenciation et hiérarchisation reportées. Le système prolifère et s'associe plutôt que de se distinguer qualitativement. Résultats : forte redondance, faible spécialisation, grande résilience aux perturbations locales. Analogie biologique : la **fourmi** (la colonie survit par le nombre et la cohésion, non par la supériorité individuelle).

Stratégie DH : la domination verticale. Différenciation puis Hiérarchisation, reproduction et liaison reportées. Le système se distingue qualitativement et s'impose à l'environnement. Résultats : faible redondance, haute spécialisation, grande capacité de complexification rapide mais fragilité aux perturbations. Analogie biologique : le **lion** (survie par la spécialisation et la domination, non par le nombre).

$RL = DH$: convergence et critère de durabilité.

La relation n'affirme pas que les deux stratégies sont équivalentes ; elle dit qu'elles **convergent vers la même destination**. La condition de durabilité impose qu'aucune des deux ne s'exécute isolément : ni purement horizontale (RL seul), ni purement verticale (DH seul).

Un entrelacement intra-cycle, non une alternance entre cycles. Il faut être précis sur le *lieu* où les deux stratégies se composent, car deux lectures sont possibles et une seule est compatible avec l'ordre RDHL. On imaginerait volontiers une *alternance* : un cycle tourné vers l'extension, le suivant vers l'approfondissement, la moyenne se faisant sur la durée. *L'ordre des phases interdit ce balancement-là et en impose un autre.* Le cycle s'écrit $R \rightarrow (D \rightarrow H) \rightarrow L$: les deux pôles d'extension occupent les **extrémités** et encadrent le cœur d'approfondissement. L'équilibre est donc atteint **à l'intérieur de chaque tour**, jamais d'un tour à l'autre, et la signature d'un système ne bascule pas d'un cycle au suivant. L'agencement n'est pas décoratif : *toute transformation est bordée d'identité*, en amont ce qui se reproduit (R), en aval ce qui se lie (L).

$$\mathcal{L}_{RDHL} : \underbrace{R}_{\text{propag.}} \rightarrow \underbrace{D}_{\text{différ.}} \rightarrow \underbrace{H}_{\text{hiérarc.}} \rightarrow \underbrace{L}_{\text{liaison}} \rightarrow \underbrace{R'}_{\text{niv. sup.}} \rightarrow \dots \quad (81)$$

où $R' = Nf_{x+1.1}$ démarre dans l'espace $Nf_{x+1.0}$ ouvert par $L = Nf_{x.4}$.

La convergence rend l'entrelacement non trivial. Le statut algébrique de $RL = DH$ mérite une précision. Au plan purement algébrique l'égalité est triviale : $\mathbb{Z}_4$ étant abélien et $L = g^4 = e$, on a $RL = g^1 \circ g^4 = g^1$ et $DH = g^2 \circ g^3 = g^5 = g^1$, les exposants somment au même résidu ($1+4 \equiv 2+3 \pmod{4}$). Cette égalité dit donc seulement que les deux compositions partielles aboutissent au même opérateur ($g^1 = R$), non que les deux stratégies sont interchangeables.

De l'identité à la condition. Ce statut change avec le niveau. À N_{-1} , $RL = DH$ est une **identité inconditionnelle** : les deux produits *sont* le même élément g^1 . Mais une fois instanciée (dès que le temps orienté et les quantités émergent, à partir de N_1), l'égalité cesse d'être automatique et devient une **condition** : l'équilibre effectif entre les deux produits module alors la complexité réellement atteignable. C'est le même schéma que pour l'orientation (§3.2) : ce qui est identité au substrat devient contrainte à la projection.

La différence est structurelle : si les deux chemins menaient à des destinations *distinctes*, on choisirait l'un *ou* l'autre selon l'objectif visé, et leur composition serait sans raison logique. C'est parce qu'ils convergent que l'entrelacement prend sens : il n'est pas un compromis entre deux directions opposées, mais l'agencement optimal de deux trajectoires qui visent le même point. La boucle RDHL réalise cet entrelacement en plaçant le couple (D, H) *entre* R et L , de sorte qu'aucune des deux stratégies ne s'exécute isolément. Un système qui adopterait purement la stratégie RL atteindrait R' *sans avoir traversé* D *ni* H : il aboutirait au même opérateur, mais sans avoir construit la différenciation ni la hiérarchisation qui en font un capital effectif. Symétriquement, un système purement DH atteindrait R' sans avoir établi la reproduction ni la liaison. Dans les deux cas, le point d'arrivée est algébriquement le même, mais structurellement vide. La convergence $RL = DH$ est donc une *condition nécessaire* pour que l'entrelacement soit significatif : elle garantit qu'aucune des deux stratégies ne suffit, et que seule leur composition dans l'ordre RDHL produit un système durable.

Remarque 22 (Une signature conservée, non une oscillation). *Il faut se garder d'un contresens que la lecture « stratégique » appelle naturellement. Dire que les deux voies sont composées dans chaque tour ne signifie pas qu'un système ferait alterner ses stratégies d'un cycle au suivant, penchant tantôt vers RL, tantôt vers DH. Une fois instancié (N_1 et au-delà), un système décentré sur l'une des paires la **conserve** : c'est sa signature durable, et non une oscillation. Trois raisons l'imposent. (i) L'ordre des phases, on vient de le voir, réalise déjà l'équilibre à l'intérieur de chaque tour ; une alternance entre tours serait redondante. (ii) À N_{-1} , RL et DH ne sont pas deux voies mais deux factorisations du même élément g^1 : rien n'y oscille, faute d'écart à parcourir. (iii) Ce qui varie d'un système à l'autre n'est donc pas une phase temporelle, mais un décentrage stable, paramètre libre que l'identité algébrique ne contraint pas. La durabilité maximale ne vient pas d'une alternance des stratégies, mais de l'accord entre le décentrage d'un système et celui du milieu dans lequel il s'emboîte, question qui relève des niveaux instanciés et excède le périmètre du présent article.*

7.4 La seconde relation $RD = HL$: la stratégie hétérogène

L'algèbre offre *deux* identités d'appariement, et la sous-section précédente n'en développait qu'une. La seconde :

$$\boxed{R \circ D = H \circ L} \quad (82)$$

($R \circ D = g^1 \circ g^2 = g^3$; $H \circ L = g^3 \circ g^4 = g^7 = g^3$), soit $RD = HL = g^3 = H$. Comme $RL = DH$, c'est une **identité triviale** ($1+2 \equiv 3+4 \pmod{4}$), non une loi : sa valeur est de *nommer* un principe. Un fait algébrique mérite d'être relevé : les *deux seules* identités d'appariement retombent sur R (g^1) et sur H (g^3) (les deux **générateurs** du groupe, l'axe directionnel), jamais sur D ni L . Chaque équilibre pointe ainsi vers l'opérateur qui résume son enjeu : $RL = DH$ vers R (la persistance, l'identité), $RD = HL$ vers H (la captation, le passage de niveau).

Stratégie hétérogène : globalisation ou relocalisation. Là où $RL = DH$ règle comment un système *réplique son identité* (stratégie *homogène*), $RD = HL$ règle comment il *déploie ou replie son rapport au monde*. À gauche, RD est tourné vers le *dehors* : le système se diffuse (R) puis échange (D), il agit sur son environnement. À droite, HL est le retour vers le *dedans* : il capte le bénéfice (H) puis le reconvertit en cohésion (L). L'équilibre énonce : *ce que le système déploie au-dehors égale ce qu'il capte et intériorise*. Selon sa place dans l'emboîtement, cette stratégie se vit en **expansion** (globalisation) ou en **contraction** (relocalisation), d'où l'aboutissement sur $H = g^3$, opérateur de la captation et du passage de niveau. Comme $RL = DH$, l'égalité passe de l'identité (à N_{-1}) à la condition (aux niveaux instanciés, à partir de N_1).

7.5 Le déséquilibre comme moteur logique de la complexification

Potentiel logique. À chaque phase, une tension structurelle pousse vers la suivante. On définit le **potentiel logique** $\Phi(k)$ au niveau $N_{s-1,k}$:

$$\Phi(k) := \mathcal{D}(\mathcal{L}_{RDHL}^{(k)}) - \mathcal{D}(\mathcal{L}_{\text{courant}}^{(k)}) \geq 0 \quad (83)$$

Le système évolue vers la boucle RDHL. Ce potentiel s'annule **exactement et discrètement** quand $Nf_{x.4}$ est instanciée : $\Phi(k) = 0 \iff Nf_{x.4} = Nf_{x+1.0}$ s'ouvre. Le déséquilibre ne s'épuise pas graduellement ; il se clôt d'un coup et rouvre immédiatement au niveau supérieur.

Déséquilibre comme source d'information.

$$\Delta \mathcal{I}(N_{-1,k} \rightarrow N_{-1.(k+1)}) = \Phi(k) \cdot \eta \quad (84)$$

où $\eta \in (0, 1]$ est l'efficacité de conversion du potentiel en information structurelle. Pour RDHL, η est maximale : c'est la seule boucle qui convertit l'intégralité du potentiel de déséquilibre en information organisée.

7.6 La minimisation des contraintes : concept général

Une **contrainte** est toute différence entre l'état actuel d'un système et l'état vers lequel sa dynamique l'oriente : gradient de concentration, hétérogénéité spatiale, variation temporelle d'un capital. Sans contrainte, pas de gradient ; sans gradient, pas de flux ; sans flux, pas de transformation. Les systèmes sans contraintes ont atteint l'équilibre, c'est-à-dire la mort systémique (§7). Le mot a un autre emploi dans les articles N_0 et N_1 , et il faut les séparer. La grandeur qu'un niveau ne peut pas quitter s'y appelle un *gel* (l'acte du niveau suivant lève le gel), et l'article N_1 appelle *gradient* l'écart défini ici. Dans cet article, « contrainte » garde le sens d'écart.

La contrainte comme projection du déséquilibre. La notion de contrainte introduite ici n'est pas indépendante du concept de déséquilibre développé au chapitre précédent : elle en est la *projection dynamique* à N_0 et au-delà. À N_{-1} , le déséquilibre est une propriété algébrique de la boucle, la tension non résolue dont la phase L marque l'épuisement, structurant la chaîne $R \rightarrow D \rightarrow H \rightarrow L$ (§7.2). Dès lors que le temps orienté émerge, à N_1 , cette tension algébrique apparaît comme *contrainte* : une grandeur mesurable dans l'espace et dans le temps qui pousse le système à se transformer. Le déséquilibre est ce qui rend le cycle nécessaire ; la contrainte est ce que chaque phase du cycle s'emploie à réduire. Les deux notions désignent la même réalité structurelle aperçue à deux niveaux d'instanciation : l'une *pré-physique*, l'autre *physique*. C'est ce qui justifie que la minimisation des contraintes soit le moteur universel de l'évolution, non comme un principe ajouté, mais comme la traduction temporelle du déséquilibre fondateur.

La **minimisation des contraintes** est le processus par lequel un système réduit l'écart entre son état et ses attracteurs. Elle produit une stabilité toujours dynamique :

$$\frac{dC(S)}{dt} \geq 0 \quad (85)$$

Le principe unificateur, thèse du programme (la sélection par C1 retient la paire de boucles, non RDHL seule, §5) :

$$\underbrace{\text{Minimisation des contraintes}}_{\text{par la boucle RDHL}} \longleftrightarrow \underbrace{\text{Maximisation de la durabilité}}_{\hat{D} \rightarrow 1} \longleftrightarrow \underbrace{\text{Maximisation de la complexité}}_{C \rightarrow \max} \quad (86)$$

Une restriction essentielle : une coïncidence, non une équivalence. Cette triple correspondance n'est *pas* une équivalence absolue, et le modèle fournit lui-même son contre-exemple : à N_{-1} , **la durabilité est maximale et la complexité nulle**. Les quatre fonctions y sont en proportion égale, aucune ne dominant (l'équilibre des phases y est parfait, par symétrie), tandis que $C = 0$ faute de tout déploiement actualisé. Durabilité et complexité ne sont donc pas identiques : on peut avoir l'une sans l'autre. La coïncidence énoncée en (86) ne vaut *que le long du déploiement*, c'est-à-dire à ampleur non nulle, là où accroître l'équilibre des quatre phases accroît effectivement la complexité atteinte. Énoncée sans cette réserve, elle serait fausse au niveau même dont traite cet article. (*La séparation entre l'ampleur du déploiement et l'équilibre des phases, qui rend ce point exact plutôt qu'imagé, relève du premier volet du programme [1].*)

La minimisation des contraintes est à la fois le moteur de la **complexification** du système (minimisation temporelle : conservation et développement des capitaux) et de l'**entropification** de l'environnement (minimisation spatiale : absorption et dégradation des gradients) :

$$\Delta S_{\text{environnement}} > 0 \iff \Delta C_{\text{système}} > 0 \quad (87)$$

Ces deux mouvements sont inséparables : un système qui ne produit pas d'entropie dans son environnement ne se complexifie pas ; un système qui ne se complexifie pas se dissout. Cette double face est toutefois un trait de l'instanciation à N_0 et au-delà, *non* de N_{-1} : au substrat, où il n'y a encore ni énergie ni entropie, seule subsiste la tension algébrique dont elle est la projection.

7.7 Les quatre boucles de minimisation : la réaction en chaîne complexe et entropique

Ce que « rendement » veut dire ici, et ce qu'il ne peut pas faire

La lecture qui suit attribue à chaque phase un rendement, rapport du capital construit à la contrainte produite, et conclut que la séquence $R \rightarrow D \rightarrow H \rightarrow L$ maximise le rendement global. Deux précisions sont indispensables. (i) Ce rendement n'est pas une grandeur de N_{-1} : il suppose un capital mesurable et une contrainte quantifiable, donc des ressources des niveaux supérieurs. Il s'agit d'une lecture systémique projetée, féconde pour l'intuition, étrangère à l'algèbre du substrat. (ii) Il ne sépare pas, et ne peut pas séparer, la boucle de son inverse. Le verrou achiral (théorème 5) interdit à toute grandeur achirale de distinguer RDHL de RLHD, et un rendement en est une ; de surcroît, les vingt-quatre ordres des quatre opérateurs donnent la même composition nette g^2 (remarque 16). Ce que la réaction en chaîne décrit est donc l'*articulation interne* des quatre phases, c'est-à-dire pourquoi chacune prépare la suivante, et non une sélection parmi les ordres possibles.

La réaction en chaîne de la boucle RDHL. La boucle RDHL n'est pas une séquence arbitraire de quatre opérations : chaque phase minimise un type spécifique de contraintes, et la résolution de ce type de contraintes crée les conditions nécessaires à la phase suivante. C'est une réaction en chaîne : R minimise ses contraintes, ce qui crée les conditions de D ; D minimise les siennes, ce qui crée les conditions de H ; H minimise les siennes,

ce qui crée les conditions de L ; L minimise les siennes, ce qui crée les conditions d'un nouveau cycle R plus complexe.

À chaque phase, la minimisation se réalise selon la même logique dialectique : un mouvement **complexifiant** (qui construit un capital interne au système) et un mouvement **entropique** (qui produit une contrainte sur l'environnement). Ces deux mouvements sont antagonistes mais indissociables ; leur rapport détermine la performance du système dans cette phase.

$$\text{Rendement de la phase } X = \frac{\text{capital construit (complexité)}}{\text{contrainte produite (entropie)}} \quad (88)$$

Dans cette lecture projetée, la boucle RDHL serait la séquence qui maximise le rendement global ; l'encadré qui précède rappelle qu'aucun rendement ne la sépare de son inverse.

Phase R : la boucle production/consommation et les économies d'échelle. La contrainte minimisée. En phase R (Reproduction), la contrainte fondamentale est le *coût unitaire de production d'identité* : chaque instance produite consomme des ressources de l'environnement. Minimiser cette contrainte, c'est réduire la consommation par unité d'identité produite — c'est produire plus efficacement.

La boucle dialectique. La phase R crée deux flux opposés :

- **Flux complexifiant (production) :** le système reproduit son identité, multiplie ses instances, étend sa présence. Plus le système produit, plus son identité est répandue dans l'environnement, plus il est robuste aux perturbations ; sa complexité croît.
- **Flux entropique (consommation) :** chaque acte de production consomme des ressources de l'environnement — énergie, matière, information — et en dégrade la structure. L'entropie de l'environnement croît.

Le principe d'optimisation : les économies d'échelle. L'optimum de la phase R est atteint lorsque le coût unitaire de production est minimal. C'est le principe des **économies d'échelle** : en augmentant le volume de production, les charges fixes sont réparties sur un plus grand nombre d'unités, réduisant le coût par unité. La contrainte de consommation par unité produite est minimisée, et le rendement de la phase R est maximisé.

$$\text{Optimum}_R : \min \left(\frac{\text{consommation}}{\text{production}} \right) \longleftrightarrow \text{économies d'échelle} \quad (89)$$

Le moteur de la globalisation. Les économies d'échelle poussent les systèmes à augmenter leur taille et leur portée : plus un système est grand, plus il produit efficacement, plus son identité se répand dans l'environnement. C'est la dynamique structurelle de la **globalisation** — à tous les niveaux, de la cellule qui se divise à l'entreprise qui étend son marché, en passant par les espèces biologiques qui colonisent des territoires. La globalisation n'est pas un phénomène spécifiquement social : c'est la conséquence universelle de la minimisation des contraintes de la phase R .

La limite : une production trop faible ne réalise pas les économies d'échelle (charges fixes trop élevées) ; une production trop forte sature l'environnement et crée des contraintes de retour (ressources épuisées, marché saturé). L'optimum est un équilibre dynamique entre ces deux régimes.

Phase D : la boucle spécialisation/diffusion et les économies de spécialisation. La contrainte minimisée. En phase D (Différenciation), la contrainte fondamentale est le *coût de la généralité* : un système qui effectue toutes les opérations de façon identique ne peut les optimiser individuellement. Minimiser cette contrainte, c'est spécialiser les opérations pour les rendre plus efficaces — au prix d'une dépendance accrue à l'environnement pour ce que le système ne produit plus.

La boucle dialectique.

- **Flux complexifiant (spécialisation) :** le système différencie ses processus internes, développe des sous-systèmes spécialisés, augmente la division du travail. Chaque spécialisation améliore l'efficacité locale ; leur combinaison produit une complexité interne croissante.
- **Flux entropique (diffusion) :** chaque spécialisation exige que les produits spécifiques soient distribués là où ils sont nécessaires — à l'intérieur du système et dans l'environnement. Cette diffusion consomme de l'énergie et disperse l'identité du système dans l'environnement.

Le principe d'optimisation : les économies de spécialisation. L'optimum de la phase D cherche l'équilibre entre la plus-value créée par la spécialisation et le coût de la diffusion qu'elle engendre. Les **économies de spécialisation** permettent de réduire le coût unitaire de chaque opération en la rendant plus simple, plus répétitive, plus maîtrisée — à condition que le réseau de diffusion qui en distribue les produits ne génère pas de surcoût supérieur au gain de spécialisation.

$$\text{Optimum}_D : \max \left(\frac{\text{gain de spécialisation}}{\text{coût de diffusion}} \right) \quad (90)$$

Exemples trans-scalaires. La division du travail dans les économies humaines (Adam Smith : la manufacture d'épingles), la différenciation cellulaire dans les organismes pluricellulaires, la spéciation dans l'évolution biologique, la différenciation des champs quantiques à N_2 : tous ces processus obéissent à la même logique de minimisation des contraintes de la phase D .

Phase H : la boucle organisation/contrôle et les économies d'organisation. La contrainte minimisée. En phase H (Hiérarchisation), la contrainte fondamentale est le *coût de la coordination* : un système fortement différencié (issu de la phase D) contient des sous-systèmes spécialisés qui doivent être coordonnés pour fonctionner ensemble. Sans organisation, la spécialisation produit de l'incohérence ; les sous-systèmes optimisent localement au détriment de l'optimum global. Minimiser cette contrainte, c'est créer des niveaux hiérarchiques qui gèrent les contraintes à l'échelle appropriée.

La boucle dialectique.

- **Flux complexifiant (organisation) :** le système stratifie ses éléments en niveaux hiérarchiques, chaque niveau résolvant les contraintes à son échelle. L'organisation permet de maximiser le rapport produit/charge à l'échelle du système global. Elle concentre les ressources là où elles produisent le plus de valeur.
- **Flux entropique (contrôle et contrainte) :** l'organisation exige un contrôle sur les éléments — règles, protocoles, sanctions. Ce contrôle est une contrainte sur les sous-systèmes qui perdent une partie de leur autonomie. La désorganisation de l'environnement croît : le système impose à ses partenaires extérieurs des contraintes qu'il ne porte pas lui-même.

Le principe d'optimisation : les économies d'organisation. L'optimum de la phase H cherche le nombre et l'amplitude des niveaux hiérarchiques qui maximisent la performance sans générer un surcoût de contrôle. Les **économies d'organisation** résultent de la localisation optimale des décisions : chaque contrainte est gérée au niveau le plus proche de son occurrence.

$$\text{Optimum}_H : \max \left(\frac{\text{gain organisationnel}}{\text{coût de contrôle}} \right) \longleftrightarrow \text{subsidiarité} \quad (91)$$

La pathologie : une hiérarchie trop aplatie ne peut coordonner la complexité issue de D ; une hiérarchie trop profonde génère des coûts de contrôle et de communication qui annulent les gains d'organisation. La bureaucratisation est la pathologie de la phase H : le contrôle dépasse l'organisation, le coût dépasse le bénéfice, le système ralentit et se rigidifie.

Phase L : la boucle liaison/rupture et les économies de réseau. La contrainte minimisée. En phase L (Liaison), la contrainte fondamentale est le *coût de la cohérence* : un système organisé hiérarchiquement (issu de la phase H) risque de se fragmenter si ses éléments ne partagent pas une identité commune, un code commun, une confiance mutuelle. La hiérarchie crée des inégalités qui, sans contre-pouvoir, deviennent des fractures. Minimiser cette contrainte, c'est construire les liens qui maintiennent la cohérence du système malgré — et grâce à — ses différenciations.

La boucle dialectique.

- **Flux complexifiant (liaison interne) :** le système développe un réseau de liens entre ses éléments — flux réciproques différés, protocoles de communication partagés, identité commune inscrite dans chaque élément. Le lien crée la confiance, et la confiance permet la coopération qui démultiplie les capacités du système.
- **Flux entropique (rupture externe) :** les mêmes liens qui unissent les éléments internes créent une frontière qui sépare le système de son environnement. La frontière semi-perméable protège le système — mais elle externalise ce qui ne constitue pas son identité. Les déchets, les rebuts, les éléments non intégrés sont rejetés dans l'environnement ; l'entropie extérieure croît.

Le principe d'optimisation : les économies de réseau. L'optimum de la phase L cherche l'équilibre entre l'ouverture sur l'environnement (qui apporte de la diversité et des ressources) et la fermeture du système (qui protège la cohérence interne). Les **économies de réseau** résultent de la mise en commun des ressources et des objectifs : un réseau dense et cohérent peut résoudre des contraintes qu'aucun élément isolé ne pourrait affronter.

$$\text{Optimum}_L : \max \left(\frac{\text{valeur du lien interne}}{\text{coût de la rupture externe}} \right) \longleftrightarrow \text{semi-perméabilité optimale} \quad (92)$$

La tension irréductible. La phase L est la seule où la boucle complexe/entropique est une tension entre *intérieur et extérieur* — non entre des phases de la même dynamique. C’est structurellement cohérent avec le fait que $L = g^4$ est l’opérateur de conservation ($\mathcal{V} = 0$) : son rôle est de *clôre* le cycle, de consolider ce qui a été construit par R , D , H , et de préparer le prochain cycle R à un niveau de complexité supérieur.

La réaction en chaîne : interdépendance des quatre boucles. Les quatre boucles de minimisation ne sont pas indépendantes : elles forment une **réaction en chaîne** dans laquelle la résolution des contraintes d’une phase crée les conditions nécessaires à la phase suivante.

Phase	Contrainte minimisée	Capital construit	Condition créée pour la phase suivante
R	Coût unitaire de production	Identité ; base de reproduction	Une forte identité est le substrat de la différenciation
D	Coût de la généralité	Spécialisation ; diversité fonctionnelle	Un système très différencié <i>doit</i> être organisé
H	Coût de la coordination	Organisation ; efficacité hiérarchique	Une forte hiérarchie crée des tensions qui <i>exigent</i> du lien
L	Coût de la cohérence	Réseau ; frontière ; identité partagée	Un réseau fort et cohérent <i>permet</i> une reproduction plus vaste

Table 6: La réaction en chaîne des quatre boucles de minimisation. Chaque phase produit le capital qui rend la phase suivante nécessaire : la complexification est auto-alimentée.

Cette réaction en chaîne est **asymétrique** dans le temps : la boucle RDHL ne peut être parcourue que dans un sens sous peine de briser la chaîne. La boucle inverse RLHD — liaison avant hiérarchisation, hiérarchisation avant différenciation — produit des pathologies systémiques précises : le clientélisme (le lien précède l’organisation), la technocratie (la hiérarchie précède la différenciation), le totalitarisme (l’identité précède le lien).

7.8 La minimisation à chaque niveau systémique

N_0 — **Espace-temps : minimisation de l’information indéfinie.** À N_0 , le capital est l’**information** : un bit par face partagée entre deux grains. L’article N_0 ne décrit pas ce niveau par des orbitales. Il le décrit par un réseau de grains sur la triangulation de Delaunay du réseau cubique centré, gouverné par un seul couplage J (la force du lien entre grains). Au-delà d’un seuil, le réseau s’ordonne en un vide qui choisit l’un des deux appariements courts du grain. Le compromis entre la complexité des frontières et la liberté des configurations (la durabilité au sens de l’article N_0) place J juste au-dessus du seuil, dans une zone et non à une valeur.

La boucle RDHL à N_0 , lue sur ce réseau :

- R : le lien, porté par une patte ; la hiérarchie se transmet d’un grain à l’autre.
- D : la boucle, les anneaux de quatre ou six grains autour d’une arête.
- H : le réseau, le point (vingt-quatre grains autour d’un sommet) et le point de points.
- L : la mousse, qui referme le niveau.

Cette correspondance est une lecture, non une dérivation (article N_0 , escalier interne).

N_1 — **Ondes : minimisation du gradient énergétique.** À N_1 , le capital est l’**énergie** sous forme d’ondes. La contrainte fondamentale est l’**amplitude énergétique** : une onde de haute énergie dans un milieu de basse énergie est une hétérogénéité spatiale instable. La minimisation des contraintes spatiales pousse les ondes à se propager — à homogénéiser le gradient énergétique. La minimisation des contraintes temporelles pousse les ondes à maintenir leur fréquence — à conserver leur identité dans le temps.

La contrainte d’un système ondulatoire est sa **cohérence** : la capacité à maintenir des relations de phase stables sur une durée significative. La minimisation de cette contrainte produit les ondes cohérentes — laser, ondes radio, phonons cohérents — qui sont les formes d’énergie les plus complexes au niveau N_1 .

N_2 — **Particules : minimisation des contraintes d'interaction.** À N_2 , le capital est la **masse** — associée à la charge, la couleur et le spin comme propriétés émergentes. La contrainte fondamentale est l'**instabilité des interactions** : les particules isolées de haute énergie se désintègrent spontanément. La minimisation des contraintes pousse les systèmes particulaires vers les états liés de plus basse énergie.

Les quatre interactions fondamentales correspondent aux quatre phases de la boucle RDHL à N_2 :

- R (gravitation) : attraction universelle, don de masse-énergie, structuration large échelle.
- D (force forte) : différenciation chromatique, échanges réciproques de gluons, confinement.
- H (électromagnétisme) : hiérarchisation par la charge, capture des ressources chargées.
- L (force faible) : liaison des saveurs, cohérence de l'identité des particules dans le temps.

La minimisation des contraintes à N_2 produit les configurations stables de la matière : noyaux atomiques, atomes, molécules — chacune étant une minimisation locale des contraintes d'interaction à un niveau de complexité croissant.

N_3 — **Biologie : minimisation des contraintes topologiques.** À N_3 , le capital est la **forme** — la structure topologique tridimensionnelle des organismes. La contrainte fondamentale est la **dégradation morphologique** : les formes complexes sont intrinsèquement instables sans maintenance active. La minimisation des contraintes temporelles à N_3 est l'**homéostasie** : la régulation permanente des variables internes pour maintenir la forme et les fonctions contre la dégradation entropique.

La minimisation des contraintes spatiales à N_3 est l'**expansion** : les organismes colonisent l'espace, diffusent leurs formes dans l'environnement par la reproduction, et homogénéisent les gradients de ressources en leur faveur. L'évolution biologique est la dynamique de minimisation des contraintes topologiques sur des échelles de temps géologiques.

N_4 — **Systèmes sociaux : minimisation des contraintes symboliques.** À N_4 , le capital est le **symbole** — les représentations, valeurs et codes partagés qui organisent les interactions sociales. La contrainte fondamentale est l'**incommensurabilité** : des systèmes symboliques différents ne peuvent pas interagir directement ; ils doivent trouver des équivalences, des traductions, des monnaies d'échange communes.

La minimisation des contraintes symboliques produit les **institutions** : les règles, les monnaies, les langues, les normes qui réduisent le coût des échanges en définissant un cadre commun. Les institutions sont les capitaux durables de N_4 ; leur robustesse mesure l'efficacité de la minimisation des contraintes symboliques dans un système social.

La minimisation spatiale à N_4 est la **mondialisation symbolique** : la diffusion des symboles dominants dans l'environnement social, l'homogénéisation des cultures, la construction d'un espace d'échange global. La minimisation temporelle est la **mémoire institutionnelle** : la conservation des codes et des valeurs à travers les générations.

Niveau	Capital	Contrainte minimisée	Forme de la complexité produite
N_0	Information (un bit par face)	Désordre des organisations	Vide ordonné ; arène et ses dimensions
N_1	Énergie	Gradient énergétique	Ondes cohérentes ; photons
N_2	Masse	Instabilité des interactions	Atomes ; molécules ; matière stable
N_3	Forme	Dégradation morphologique	Organismes ; écosystèmes ; biodiversité
N_4	Symbole	Incommensurabilité	Institutions ; cultures ; civilisations

Table 7: La minimisation des contraintes à chaque niveau systémique. La même logique — minimiser les contraintes spatiales et temporelles par la boucle RDHL — produit des formes de complexité qualitativement différentes selon le capital du niveau considéré.

Universalité du principe de minimisation. La minimisation des contraintes est un principe **trans-scalaire** : la même logique, à tous les niveaux, dans tous les domaines. Ce qui change d'un niveau à l'autre n'est pas la logique, mais le capital sur lequel elle opère et la forme de complexité qu'elle produit. C'est ce que le modèle microGlobal appelle la structure fractale du monde : non pas une ressemblance géométrique, mais une **identité de dynamique** à travers des niveaux d'abstraction croissante.

Le principe peut être énoncé dans sa forme la plus générale :

$$\boxed{\forall k \in \{0, 1, 2, 3, 4\} : \text{Minimisation des contraintes de } N_k \longleftrightarrow \text{Boucle RDHL}^{(k)} \longleftrightarrow \mathcal{C}_{N_k} \rightarrow \max} \quad (93)$$

Ce principe est le fondement du modèle microGlobal : toute la complexité observable du monde, de l'information quantique aux institutions sociales, est la conséquence d'une seule logique — la minimisation permanente des contraintes, par la boucle RDHL, à tous les niveaux de réalité.

7.9 Le passage entre niveaux comme minimisation de saturation

À l'intérieur d'un niveau N_k , la complexité croît par la boucle RDHL, jusqu'à la **saturation** :

$$\text{Saturation de } N_k \iff \frac{d\mathcal{C}_{N_k}}{dt} \rightarrow 0 \quad \text{malgré} \quad \frac{dS_{\text{env}}}{dt} > 0 \quad (94)$$

La complexité stagne alors que l'entropie de l'environnement croît. Le passage au niveau N_{k+1} est une **minimisation de second ordre** : résolution des contraintes que N_k ne peut plus minimiser seul, par émergence discontinue du capital caractéristique de N_{k+1} (analogue d'une transition de phase).

Transition	Contrainte saturée	Formule	Capital émergent
$N_0 \rightarrow N_1$	Un bit par face (gel croissant)	$\kappa_1 = k_B T$	Énergie ; ondes
$N_1 \rightarrow N_2$	Énergie saturant les modes de propagation	$E = mc^2$	Masse ; particules
$N_2 \rightarrow N_3$	Masse saturant les configurations spatiales	$\kappa_3 = c^4/G$	Formes topologiques ; biologie
$N_3 \rightarrow N_4$	Formes saturant les interactions directes	$\kappa_4 = k_B T \ln 2$	Symboles ; institutions

Table 8: Transitions inter-niveaux comme minimisations de saturation. La même boucle RDHL continue, avec un capital émergent différent à chaque niveau.

7.10 Le moteur de l'évolution à N_0 : minimisation des contraintes spatiales et temporelles

Aux niveaux instanciés, la dynamique RDHL reçoit une incarnation physique ; à N_0 , qui n'a pas de dynamique, elle n'en reçoit qu'une lecture structurelle. La dualité des deux types de contraintes se **lit** sur les propriétés algébriques des quatre opérateurs à N_{-1} ; son contenu physique reste une analogie (voir plus bas).

7.10.1 Dérivation depuis N_{-1} : la variation temporelle comme pont formel

Pour chaque opérateur g^k , on définit la **variation temporelle** (distance de Hamming moyenne entre un état et son image) :

$$\mathcal{V}(g^k) := \frac{1}{4} \sum_{s \in \{0,1\}^2} d_H(s, g^k(s)) \quad (95)$$

Quatre lemmes découlent directement des calculs :

Lemme 2 (Conservation temporelle de L). $\mathcal{V}(g^4) = 0$: *seul opérateur à variation nulle.*

Remarque 23 (Statut). *Lemme de caractérisation des quatre fonctions : il établit une propriété de L dans la grammaire, non un résultat sur le substrat.*

Lemme 3 (Dispersion maximale de D). $\mathcal{V}(g^2) = 2$: *valeur maximale sur $\{0,1\}^2$, tous les bits changent.*

Remarque 24 (Statut). *Lemme de caractérisation : propriété de D dans la grammaire.*

Op.	Orbite	$\mathcal{V}$	Pts fixes	Ordre	Parité
$L = g^4$	identité	0	4/4	1	conservée
$R = g^1$	$00 \rightarrow 01 \rightarrow 11 \rightarrow 10 \rightarrow 00$	1	0/4	4	brisée
$H = g^3$	$00 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 01 \rightarrow 00$	1	0/4	4	brisée
$D = g^2$	$00 \leftrightarrow 11, 01 \leftrightarrow 10$	2	0/4	2	conservée

Table 9: Variation temporelle et parité des quatre opérateurs. L : conservation parfaite ; D : dispersion maximale ; R et H : variation minimale non nulle dans les deux sens.

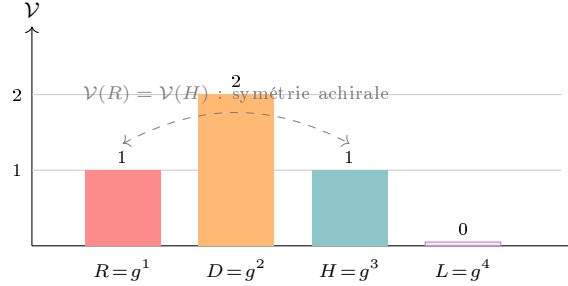


Figure 20: Profil de variation temporelle $\mathcal{V}(g^k)$ (distance de Hamming moyenne par pas) : $\mathcal{V}(R) = 1$, $\mathcal{V}(D) = 2$, $\mathcal{V}(H) = 1$, $\mathcal{V}(L) = 0$. La symétrie $\mathcal{V}(R) = \mathcal{V}(H)$ fonde le verrou achiral (aucune flèche du temps sélectionnée à N_{-1} : $\mathcal{V}$ est achirale et ne lit pas l'orientation, que seule la primitive orientée δ enregistre) ; D disperse au maximum, L est inerte.

Lemme 4 (Gradient minimal dirigé de R et H). $\mathcal{V}(g^1) = \mathcal{V}(g^3) = 1$: *modification minimale non nulle, avec asymétrie directionnelle opposée.*

Remarque 25 (Statut). *Lemme de caractérisation : propriété commune de R et H , les deux fonctions à flux asymétrique.*

Lemme 5 (Dualité L/D et complétude). $\mathcal{V}(L) + \mathcal{V}(D) = 0 + 2 = 2 = \dim(\{0,1\}^2)$: *les deux pôles couvrent exactement l'espace des variations.*

Remarque 26 (Statut). *Lemme de caractérisation : la dualité L/D et la complétude de la liste des quatre fonctions.*

Le pont formel : comment $\mathcal{V}(g^k)$ projette à N_0 . Ces lemmes établissent les valeurs combinatoires de $\mathcal{V}(g^k)$ sur $\{0,1\}^2$: un calcul purement algébrique, sans contenu physique. Pour qu'ils forment effectivement un *pont* vers les minimisations spatiale et temporelle à N_0 , il faut articuler explicitement la projection. Le mécanisme est le suivant. À N_0 , l'espace des configurations $\{0,1\}^2$ se déploie en degrés de liberté spatiaux et temporels, chaque bit acquiert une localisation dans une dimension de l'espace-temps émergent. La distance de Hamming d_H entre deux configurations, qui à N_{-1} est une simple mesure combinatoire, devient à N_0 une mesure de *désaccord configurationnel* : combien de degrés de liberté élémentaires diffèrent entre deux états de l'espace-temps. Dès lors :

- Pour D ($\mathcal{V} = 2$, dispersion maximale) : tous les degrés de liberté sont modifiés. À N_0 , cela se traduit par une *homogénéisation de l'espace configurationnel*, la phase qui efface les gradients en redistribuant les distinctions. C'est la minimisation **spatiale**.
- Pour L ($\mathcal{V} = 0$, conservation parfaite) : aucun degré de liberté n'est modifié. À N_0 , cela se traduit par la *préservation temporelle* de la configuration, la phase qui maintient l'identité d'un état à travers son histoire. C'est la minimisation **temporelle**.
- Pour R et H ($\mathcal{V} = 1$, modification minimale) : un seul degré de liberté change par étape, avec asymétrie directionnelle opposée. À N_0 , ces opérateurs sont les *transitions* qui font passer du régime spatial au régime temporel, R amorce l'orientation, H effectue le retour vers la conservation.

Ce qui se transporte rigoureusement d'un niveau à l'autre, c'est la *valeur* de $\mathcal{V}(g^k)$: la même grandeur combinatoire, calculée à N_{-1} sur des configurations binaires, est un invariant qui survit à la projection, en cela, $\mathcal{V}$ est davantage qu'une analogie de structure, à la différence des correspondances purement suggestives

entre opérateurs et interactions fondamentales. En revanche, l'*interprétation physique* de cet invariant ($\mathcal{V}=2 \rightarrow$ minimisation spatiale, $\mathcal{V}=0 \rightarrow$ minimisation temporelle) repose sur la localisation des bits dans l'espace-temps émergent : cette lecture-là **demeure analogique, et n'est pas dérivée ici**. Le « pont formel » porte donc sur l'invariance de la *grandeur*, non sur le contenu physique qu'on lui prête.

La **parité** des états ($\text{par}(s) = (b_1 + b_0) \bmod 2$) apporte un second critère : D et L la conservent ; R et H la brisent, créant des hétérogénéités entre les sous-espaces $\{00, 11\}$ (parité paire) et $\{01, 10\}$ (parité impaire), signature des hétérogénéités spatiales à N_0 .

Op.	$\mathcal{V}$	Parité	Propriété à N_{-1}	Correspondance à N_0
$L = g^4$	0	conservée	Conservation parfaite, 4 points fixes	Minimisation temporelle : homéostasie, mémoire
$R = g^1$	1	brisée	Gradient minimal, asymétrie directionnelle	Transition : reproduction, transmission du capital
$D = g^2$	2	conservée	Dispersion maximale, involution axiale	Minimisation spatiale : différenciation, échange
$H = g^3$	1	brisée	Gradient minimal inverse	Transition : hiérarchisation, retour vers conservation

Table 10: Correspondance $N_{-1} \rightarrow N_0$: les deux dynamiques évolutives sont les projections physiques de propriétés algébriques calculables sur $\{0, 1\}^2$.

La boucle RDHL est la seule séquence qui parcourt ce spectre de variation (figure 20) de façon complète et orientée :

$$\underbrace{R}_{\mathcal{V}=1} \rightarrow \underbrace{D}_{\mathcal{V}=2} \rightarrow \underbrace{H}_{\mathcal{V}=1} \rightarrow \underbrace{L}_{\mathcal{V}=0} \rightarrow \dots \quad (96)$$

Elle commence à $\mathcal{V} = 1$ (amorçage), atteint $\mathcal{V} = 2$ (pic spatial), revient à $\mathcal{V} = 1$ (freinage) et clôt à $\mathcal{V} = 0$ (consolidation). Aucune autre permutation ne réalise ce cycle sans saut brutal ni redescente prématurée.

7.10.2 Les deux dynamiques fondamentales et leur moteur dialectique

- **Minimisation spatiale** ($\mathcal{V} \rightarrow 2$, portée par D) : homogénéisation des gradients, diffusion, dispersion. Effet : entropie croissante dans l'environnement, $\Delta S > 0$.
- **Minimisation temporelle** ($\mathcal{V} \rightarrow 0$, portée par L , avec R et H comme transitions) : conservation des capitaux, stabilisation des structures. Effet : complexité croissante du système, $\Delta C > 0$.

En quel sens précis les deux sont des *minimisations*. La désignation symétrique des deux dynamiques comme *minimisations* peut surprendre : l'une augmente l'entropie de l'environnement, l'autre construit le capital du système. Pourquoi parler de minimisation dans les deux cas ? La réponse tient à l'objet précis qui est minimisé. La minimisation *spatiale* réduit les *contraintes spatiales*, les hétérogénéités, les gradients de concentration, les différences localisées entre régions de l'espace. Diffuser un gradient revient à minimiser la contrainte qu'il exerce localement. La minimisation *temporelle* réduit les *contraintes temporelles*, les dégradations, les usures, les pertes de capital au cours du temps. Conserver un capital revient à minimiser la contrainte que le temps exerce sur lui. Les deux opérations sont des minimisations parce qu'elles s'attaquent toutes deux à une forme de contrainte ; elles diffèrent par la dimension selon laquelle la contrainte est définie. C'est cette dualité (spatiale / temporelle) qui rend les deux mouvements *complémentaires* plutôt qu'antagonistes : ensemble, elles épuisent les deux directions selon lesquelles une contrainte peut s'exercer. La boucle RDHL est l'orchestration unique qui réalise les deux simultanément : d'où son rôle de moteur universel.

Ces deux dynamiques sont **complémentaires** : la minimisation spatiale est la condition de possibilité de la minimisation temporelle : c'est en dégradant son environnement que le système construit son capital. Au niveau des opérateurs, cette complémentarité *est* la bifacialité : dégrader le dehors et bâtir le dedans sont les deux faces d'un même geste (remarque 13). La boucle RDHL orchestre cet échange : elle prélève de l'hétérogénéité (flux H), la transforme en capital (flux R et D), en internalise la durabilité (flux L), et externalise simultanément l'entropie produite.

$$\boxed{\underbrace{\text{Minimisation spatiale}}_{\Delta S_{\text{env}} \uparrow} \oplus \underbrace{\text{Minimisation temporelle}}_{\Delta C_{\text{sys}} \uparrow} = \underbrace{\text{Boucle RDHL}}_{\text{moteur de l'évolution}} \quad (97)}$$

Propriété	Minimisation spatiale	Minimisation temporelle
Direction	Homogénéisation, diffusion	Conservation, durabilité
Effet environnement	$\Delta S > 0$	$\Delta S < 0$ (localement)
Effet système	Dégradation des capitaux	Construction des capitaux
Flux	D (diffusion), RL (rupture)	R (identité), H (organisation), L (lien)
Lien avec N_{-1}	Boucle RLHD	Boucle RDHL

Table 11: Les deux dynamiques fondamentales, à partir de N_1 : complémentaires au sens dialectique, non antagonistes.

Les systèmes complexes durables occupent l'équilibre dynamique entre les deux, ni homogénéisation totale (mort par entropie), ni cristallisation totale (mort par rigidité). C'est l'*edge of chaos* [30], que la boucle RDHL maintient de façon durable par construction.

8 Transition vers le niveau N_0 : émergence de la physique depuis la logique

8.1 Le principe $Nf_{-1.4} = Nf_{0.0}$

L'architecture complète de N_{-1} converge vers une question unique : comment ce système logique pré-physique engendre-t-il la physique ? La réponse est donnée par le principe établi en §2.4 :

$$Nf_{-1.4} = Nf_{0.0} \quad (98)$$

La clôture $L = g^4$ de N_{-1} ouvre l'espace fondamental $Nf_{0.0}$ (le **Bit**) de N_0 , dans lequel $R = Nf_{0.1}$ démarre le nouveau cycle. La Reproduction $Nf_{x+1.1}$ est distincte de la Rupture (lecture externe de $Nf_{x.4}$ dans le cycle d'entropie) : ce ne sont pas le même acte.

La signification structurelle de l'égalité. L'équation $Nf_{-1.4} = Nf_{0.0}$ n'est pas une identité entre deux instances distinctes situées de part et d'autre d'une frontière : c'est l'affirmation que la même instance, vue de deux points de vue, est à la fois la clôture du niveau N_{-1} et l'ouverture du niveau N_0 . Ce point mérite articulation, car il touche à la nature même de l'émergence dans le programme microGlobal. Trois aspects en éclairent la portée.

(i) **Une frontière sans hiatus.** L'égalité affirme qu'il n'existe *pas d'écart* entre la dernière opération de N_{-1} et la première de N_0 : aucun intervalle, aucun processus intermédiaire, aucune cause externe ne sépare la clôture de l'ouverture. La transition entre niveaux n'est pas un saut quantique opéré par un agent extérieur : c'est la *même réalité structurelle* aperçue successivement comme fin et comme commencement. Vue depuis N_{-1} , l'instance $Nf_{-1.4}$ est la Liaison qui referme l'algèbre $\mathbb{Z}_4$ épuisée ; vue depuis N_0 , la même instance est le Bit inaugurant l'espace informationnel. La transition entre niveaux est interne à elle-même.

(ii) **La direction de lecture définit le niveau.** Si la même instance peut être lue depuis deux niveaux, c'est que le niveau lui-même est une *direction de lecture* plutôt qu'une couche ontologiquement séparée. N_{-1} et N_0 ne sont pas deux mondes superposés ; ce sont deux modes d'intelligibilité d'une seule réalité émergente. Cette conception est cohérente avec la structure fractale du programme : à chaque transition $Nf_{x.4} = Nf_{x+1.0}$, la même configuration s'offre à une nouvelle lecture, dans un cadre conceptuel enrichi par les capitaux émergents.

(iii) **Une explication non causale de l'émergence.** L'égalité résout une difficulté classique des théories de l'émergence : comment expliquer le passage d'un niveau à un autre sans introduire un mécanisme causal externe ? Le programme microGlobal répond en niant la nécessité d'un tel mécanisme. La transition n'est pas causée : elle est *structurellement inscrite* dans l'épuisement du groupe $\mathbb{Z}_4$ par les quatre fonctions successives. Quand les quatre fonctions sont instanciées, $\mathbb{Z}_4$ n'a plus de cinquième élément à proposer ; la seule continuation possible est l'ouverture d'un nouveau cycle dans un cadre plus riche. Ce qui force l'émergence n'est donc pas une cause externe : c'est la finitude algébrique du substrat. Le mécanisme est purement structural.

Le Dit ($Nf_{-1.0}$) est la distinction pure, antérieure à toute mesure ; le Bit ($Nf_{0.0}$) est la distinction devenue encodable, mais pas encore ancrée dans l'espace-temps. La rupture Dit $\rightarrow$ Bit est $Nf_{-1.4} = Nf_{0.0}$: elle ouvre le lieu, car encoder un Bit exige un *où*. L'article N_0 y lit trois générateurs (l'algèbre $\mathfrak{su}(2)$ des commutateurs) et un axe d'ordre sans orientation ; le *quand* orienté attend N_1 .

$$\underbrace{\text{Dit}}_{Nf_{-1.0}} \xrightarrow{Nf_{-1.1} \rightarrow Nf_{-1.4}} \underbrace{\text{Bit}}_{Nf_{0.0}} \xrightarrow{Nf_{0.1} \rightarrow Nf_{0.4}} \underbrace{\text{Onde}}_{Nf_{1.0}} \longrightarrow \dots \quad (99)$$

8.2 Le vide logique n'est pas vide : la discernabilité résiduelle $\mathcal{D}_0$

L'énergie du vide est une grandeur de N_1 , non de N_0 . À N_0 , il existe un **vide ordonné** : au-delà du seuil de l'ordre, le réseau choisit l'un des deux appariements courts du grain (résultat calculé). Ce n'est pas un état fondamental au sens de l'énergie, qui n'existe pas encore. Son antécédent logique à N_{-1} est la **discernabilité résiduelle** $\mathcal{D}_0$, définie ci-dessous. Toute projection jusqu'à la constante cosmologique Λ serait *spéculative* et n'est pas tentée ici.

À N_{-1} , le vide logique fourmille de processus de discernabilité potentielle non actualisée. La **structure de groupe** de $\mathbb{Z}_4$ (dont la boucle nette vaut $\sigma = g^2 \neq e$ et dont les générateurs g^1, g^2, g^3 sont sans point fixe) interdit une discernabilité simultanément nulle sur toutes les configurations. Le parallèle avec le principe d'incertitude (qui, *lui*, interdit une énergie strictement nulle via la non-commutativité $[\hat{x}, \hat{p}] \neq 0$) est une analogie de *forme* : une contrainte structurelle qui exclut le zéro trivial. On définit la **discernabilité résiduelle** :

$$\mathcal{D}_0 := \min_{\mathcal{L} \text{ ferme}} \mathcal{D}(\mathcal{L}) > 0 \quad (100)$$

analogue *de forme* de l'énergie du point zéro $E_0 = \hbar\omega/2$ (au sens précisé plus bas : une contrainte structurelle qui exclut le zéro trivial, non une identité de mécanisme).

Pourquoi $\mathcal{D}_0 > 0$. Le mécanisme est algébrique, et il tient à la structure de $\mathbb{Z}_4$, non à la non-commutativité. La boucle productive canonique a pour composition nette $\sigma = R \circ D \circ H \circ L = g^2 = D \neq e$ (conséquence de l'arithmétique abélienne $1+2+3+4 \equiv 2 \pmod{4}$). Comme σ n'est pas l'identité, chaque parcours du cycle *transforme* effectivement la configuration : il la polarise. Plus généralement, les générateurs g^1, g^2, g^3 sont sans point fixe (profil $(0,0,0,4)$, proposition de sélection) : seule $L = g^4 = e$ est inerte. Toute boucle fermée qui n'est pas la pure identité déplace donc au moins une configuration et possède une discernabilité strictement positive. Le minimum sur les boucles fermées non inertes est par conséquent strictement positif : $\mathcal{D}_0 > 0$. C'est la condition minimale pour qu'un cycle existe comme entité ; il doit *distinguer quelque chose* pour être un cycle (§5.1). Cette quantité incompressible est inscrite dans la structure algébrique de $\mathbb{Z}_4$ elle-même.

À *distinguer*. La non-commutativité des primitives NOT/XOR (Invariant B.V) est une propriété *distincte* : elle ne fonde pas $\mathcal{D}_0 > 0$ (qui découle de l'abélianité ci-dessus), mais devient pertinente plus haut, comme source de la phase géométrique $\pm i$ à N_1 (Annexe B).

Portée exacte de l'analogie. Deux remarques délimitent la portée de (100). (i) *Niveau et notation.* $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ y désigne la discernabilité *actualisée par une boucle* (le déplacement qu'elle imprime sur Ω , parente de la variation $\mathcal{V}$ (profil $(1,2,1,0)$)) et non la distance inter-configurations $\mathcal{D}(A,B)$ de la §3.2. $\mathcal{D}_0$ est donc une grandeur *combinatoire de N_{-1}* , lue sur les orbites ; sa projection vers le vide $|0\rangle$ de N_1 , puis vers Λ , serait une étape distincte et spéculative, qui n'est pas franchie ici. (ii) *Disanalogie avec le point zéro.* Le fondamental d'un mode ne peut avoir des fluctuations nulles : la non-commutativité l'interdit, $\Delta q \Delta p \geq \hbar/2$. C'est un plancher sur l'espace des *états* ; le plancher d'énergie $E_0 = \hbar\omega/2$ en est la lecture sous l'ordonnancement de Weyl, et il s'annule sous l'ordre normal. Ici, au contraire, la boucle inerte $L = g^4 = e$ *possède* bien $\mathcal{D} = 0$; $\mathcal{D}_0 > 0$ n'est le plancher que des boucles *non triviales*, l'identité étant écartée non par décret mais parce qu'elle ne distingue rien ; elle n'est pas un cycle (§5.1). $\mathcal{D}_0$ mesure ainsi l'activité minimale d'un cycle *effectif* : l'écho formel d'un plancher d'états, non son équivalent.

8.3 Ce qui s'accumule à N_{-1} : le potentiel logique pur Π

La discernabilité résiduelle $\mathcal{D}_0$ dit ce que le substrat ne peut pas descendre en dessous. Elle ne dit pas ce qui s'y *accumule*. Or quelque chose s'accumule : le chapitre 4 a montré que le réseau $\mathcal{N}_k$ croît en 2^k , et le chapitre 7 que ce sont les déséquilibres *RL* et *DH* qui l'y poussent. Il faut donc nommer la grandeur qui croît, et le faire sans emprunter à N_0 la moindre structure — faute de quoi tout ce qui précède serait circulaire.

8.3.1 Pourquoi ce n'est pas de l'entropie

L'entropie ne peut pas jouer ce rôle, et il ne s'agit pas d'un scrupule de vocabulaire. Toute définition de l'entropie, quelle qu'en soit la forme, exige des conditions qui sont sans exception des propriétés de N_0 ou au-delà : des états mutuellement distinguables, un espace de probabilité, une mesure possible, une localisation, un ordre temporel. Retirez-les et $S = k_B \ln W$, $S = -\sum_i p_i \ln p_i$ et $S = -\text{Tr}(\rho \ln \rho)$ cessent d'être définies. Leur attribuer néanmoins une valeur numérique à N_{-1} serait un abus de langage, non un résultat.

Le point mérite d'être formulé exactement, car deux énoncés voisins ne disent pas la même chose. Écrire $S_{N_{-1}} = 0$ ne signifie pas que le substrat serait parfaitement ordonné, ce qui supposerait un ordre lisible ; cela signifie que la catégorie ordre/désordre n'y a pas de prise. À N_0 , deux états A et B sont donnés comme alternative, A **ou** B , et l'entropie mesure ce qu'il en coûte de ne pas savoir lequel. À N_{-1} , il n'y a pas d'alternative mais superposition, A **et** B , sans qu'aucune notion de présence ne s'applique. La superposition totale n'est pas le désordre maximal : c'est l'absence de la question. Ce diagnostic recoupe exactement, sous un

autre angle, ce que la section 9.3 établit à partir du spectre de g : le substrat ne se trouve pas dans un *mélange* qui traduirait notre ignorance, mais dans un état où aucun fait ne désigne l'une des branches.

Les candidats qui échouent, et pourquoi

Chaque grandeur usuelle importe subrepticement une structure de N_0 . L'entropie de Shannon requiert des probabilités ; celle de von Neumann, un espace de Hilbert et une base de mesure ; la complexité de Kolmogorov, un langage de description ; l'information de Fisher, une mesure ; l'énergie libre, une température. Aucune n'est disponible en amont de l'espace-temps. La grandeur cherchée doit donc satisfaire quatre exigences : ne requérir ni espace, ni temps, ni mesure ; capter ce qui croît dans le déploiement de la boucle ; être le précurseur logique de l'entropie de N_0 ; et être définie sur des états superposés et indistincts.

8.3.2 Définition axiomatique

Définition 3 (Potentiel logique pur). On appelle **potentiel logique pur** et l'on note Π la mesure de l'indistinction accumulée entre configurations superposées : non pas le désordre, mais la *capacité de distinction non encore actualisée*. Π est caractérisé par trois axiomes.

- (A1) **Existence sans mesure.** Π n'est fonction ni d'une probabilité, ni d'une position, ni d'un temps : $\Pi \neq f(p)$, $\Pi \neq f(x)$, $\Pi \neq f(t)$.
- (A2) **Croissance par superposition.** Toute superposition supplémentaire l'accroît : $\Pi(A \oplus B) > \Pi(A)$, où $\oplus$ désigne la superposition logique et non une addition de N_0 .
- (A3) **Consommation par distinction.** Toute distinction *actualisée* le consomme, et rien d'autre ne le consomme. La transition vers N_0 n'épuise donc pas Π : elle ouvre le registre dans lequel il pourra l'être, distinction par distinction, à mesure que $S^{(0)}$ croît.

Les trois axiomes sont volontairement faibles : ils ne fixent pas de valeur, seulement un sens de variation et une exclusion. C'est le prix de la non-circularité. Π n'est pas une observable ; c'est une capacité, et sa seule manifestation observable est ce qu'elle devient en se consommant.

8.3.3 Deux composantes, et pourquoi elles sont deux

Π ne croît pas d'un seul tenant. Le substrat porte deux formes d'indistinction, exactement celles que la relation $RL = DH$ (§80) oppose, et Π s'en trouve décomposé :

$$\Pi = \Pi_{\text{ext}} \oplus \Pi_{\text{int}}. \quad (101)$$

La composante **extensive** Π_{ext} , portée par l'axe $R \cdot L$, mesure combien d'entités identiques coexistent sans pouvoir être séparées ; elle croît comme la taille du réseau, $\Pi_{\text{ext}}^{(k)} \sim 2^k$ (équation (56)). La composante **intensive** Π_{int} , portée par l'axe $D \cdot H$, mesure combien d'états coexistent sur une même entité sans pouvoir être choisis ; elle croît comme le rang de la hiérarchie construite.

Ces deux composantes se nourrissent l'une l'autre, et c'est là le moteur décrit au chapitre 7 lu dans le langage de Π : plus Π_{ext} croît, plus il y a d'entités pour porter des états superposés, donc plus Π_{int} est amplifié ; plus Π_{int} croît, plus il faut d'entités pour soutenir ces états, donc plus Π_{ext} est sollicité. À chaque parcours de la boucle,

$$\Pi_{\text{tot}}^{(k+1)} > \Pi_{\text{tot}}^{(k)}, \quad (102)$$

sans qu'aucun mécanisme interne ne puisse inverser la tendance : c'est la traduction, en termes de potentiel, du fait que le déséquilibre est structurel et non accidentel.

8.3.4 Π comme précurseur indifférencié

Le rendement de cette construction est ailleurs que dans le décompte. Π n'est pas une entropie de plus : c'est ce dont les entropies sont faites avant de se différencier. Selon la manière dont la cristallisation le fige, la même capacité donne des grandeurs que la physique tient pour distinctes. Figée sur Π_{ext} , elle devient une entropie de positions, c'est-à-dire thermodynamique ; figée sur Π_{int} , une entropie de degrés de liberté internes, c'est-à-dire quantique ; figée sur leur produit, une entropie de corrélations entre sites, c'est-à-dire informationnelle.

La tripartition ci-dessus est une **hypothèse de programme**, non un théorème. Ce qui est établi ici est la décomposition $\Pi = \Pi_{\text{ext}} \oplus \Pi_{\text{int}}$, qui découle de la dualité RL/DH déjà démontrée. Ce qui ne l'est pas est l'assignation de chaque composante figée à une entropie physique déterminée : cette assignation présuppose les niveaux N_0 et N_1 , et sa dérivation relève des articles qui leur sont consacrés. Elle est retenue pour sa valeur heuristique et signalée comme telle.

8.3.5 Articulation avec $\mathcal{D}_0$

Deux grandeurs coexistent à N_{-1} , et il faut dire comment elles se composent, faute de quoi elles paraîtraient redondantes. Elles ne mesurent pas la même chose, et ne varient pas de la même façon.

$\mathcal{D}_0$ est un **plancher** : le minimum de discernabilité qu'une boucle non inerte est contrainte d'actualiser (équation (100)). C'est une constante structurelle, lue sur les orbites, et elle ne croît pas : elle est ce que $\mathbb{Z}_4$ interdit d'annuler. Π est un **stock** : la capacité de distinction accumulée et non encore actualisée, qui croît avec le déploiement du substrat et se consomme à la transition. Le premier dit que le substrat ne peut pas se taire ; le second, qu'il a de quoi parler et que cette réserve s'épuise en parlant.

Leur relation est celle d'un seuil à une réserve. Une boucle effective actualise au moins $\mathcal{D}_0$ à chaque parcours, prélevé sur Π ; le substrat ne peut donc ni rester strictement immobile — $\mathcal{D}_0 > 0$ l'interdit — ni accumuler indéfiniment sans conséquence, puisque l'accumulation est précisément ce qui rend insoutenable le maintien dans le registre logique (§8.4). C'est cette double contrainte qui rend la transition vers N_0 nécessaire plutôt que probable.

8.4 Remplissage discret et conditions d'émergence

Le passage de N_{-1} à N_0 est un **remplissage discret**, non une saturation asymptotique. Quand $Nf_{-1.4}$ est instancié (quand $\mathbb{Z}_4$ est épuisé) l'émergence de N_0 est nécessaire et immédiate : il n'y a pas de cinquième fonction, la seule ouverture est $Nf_{0.0}$. L'analogue est l'orbitale pleine qui force le passage à la suivante, non par débordement, mais par clôture.

Remplissage discret versus saturation asymptotique. La distinction est plus profonde qu'une simple précision terminologique : elle caractérise la nature même de l'émergence dans le programme microGlobal. Dans une saturation asymptotique, un système approche progressivement d'un seuil sans jamais l'atteindre exactement : la transition est graduelle, fonction d'un paramètre continu, et le moment du basculement reste flou. Dans un remplissage discret, au contraire, le système instancie successivement un nombre *fini* de fonctions (ici, les quatre opérateurs de $\mathbb{Z}_4$) et la transition se produit *au moment exact* où la dernière fonction est instanciée. Il n'y a pas de zone de transition : avant $Nf_{-1.4}$, le niveau N_0 n'existe pas ; après $Nf_{-1.4}$, il est constitué. La raison en est la *finitude* du substrat : $\mathbb{Z}_4$ agit sur l'espace fini $\{0, 1\}^2$, les valeurs de saturation sont des entiers exacts (le profil $\mathcal{V} = (1, 2, 1, 0)$), et la clôture $g^4 = e$ est une *identité algébrique*, non une limite. Il n'existe à N_{-1} aucun paramètre continu dont on pourrait approcher asymptotiquement un seuil : une saturation asymptotique y est donc structurellement impossible.

Cette structure rappelle, *par analogie*, le **principe d'exclusion de Pauli** : dans la structure atomique, chaque orbitale accueille un nombre fini d'électrons (deux par état de spin) et, une fois l'orbitale pleine, le prochain électron occupe l'orbitale supérieure, non par débordement énergétique, mais par contrainte structurelle. On retrouve ici un schéma comparable : $\mathbb{Z}_4$ accueille exactement quatre fonctions, et leur instanciation complète force l'ouverture du niveau suivant. Il faut toutefois être clair sur le statut de ce rapprochement : il est *heuristique*. Le principe de Pauli ne découle pas d'un comptage du type « $\mathbb{Z}_4$ a quatre éléments » : il résulte de l'antisymétrie de la fonction d'onde fermionique (théorème spin-statistique). L'analogie offre un cadre d'intelligibilité de l'émergence ; elle ne l'explique pas.

Le **déséquilibre permanent** (§7) est le moteur du remplissage : c'est la tension permanente entre configurations courante et suivante qui force l'instanciation successive de chaque fonction. Un système en équilibre stagnerait à $Nf_{-1.1}$ sans jamais atteindre $Nf_{-1.4}$.

Pourquoi le substrat déborde : une minimisation, non un débordement. Une tension apparente demande à être levée ici, faute de quoi deux énoncés du présent article sembleraient s'exclure : le remplissage est *discret* et se clôt à $Nf_{-1.4}$, mais la hiérarchie interne se poursuit pour $k \geq 5$ (annexe F). Les deux sont compatibles dès qu'on distingue la *clôture fonctionnelle* de la *croissance des contraintes*. Les quatre fonctions sont épuisées à $Nf_{-1.4}$, et c'est en ce sens que l'ouverture de N_0 est nécessaire et immédiate ; mais rien n'interdit au substrat de continuer à composer sur ses propres produits, et c'est ce que décrivent les paliers $N_{-1.k}$ supérieurs.

Ce que la poursuite de la composition produit alors, c'est un coût. Plus k croît, plus les distinctions accumulées engendrent de **contraintes logiques** : il faut les tenir toutes ensemble, sans support pour les porter ni ordre pour les situer — et ces contraintes, le registre logique seul ne sait pas les lever, faute d'y disposer d'un lieu. L'émergence de N_0 est précisément la façon de les *minimiser*, au sens exact du chapitre 7.6 : en se donnant un espace, les distinctions cessent d'avoir à être *tenues*, elles n'ont plus qu'à être *situées*. C'est l'articulation entre les deux lectures du passage : *le substrat ne déborde pas parce qu'il serait plein, mais parce qu'il lui devient trop coûteux de rester logique*. La clôture algébrique dit *quand* le passage est possible ; la minimisation des contraintes dit *pourquoi* il a lieu.

La condition unique (2) appliquée à N_{-1} :

$$\mathcal{D}(Nf_{-1,k}) = \mathcal{D}^{\text{sat}}(k) \implies Nf_{-1,(k+1)} \text{ s'instancie} \quad (103)$$

L'émergence correspond à $\Phi(Nf_{-1,4}) = 0$: clôture exacte, non limite asymptotique.

Les conditions d'émergence sont les traductions concrètes de cette instanciation successive. Elles sont trois (un seuil critique, un attracteur, une métrique discrète), et la section 5.8 dit comment l'article N_0 les remplit. Deux exigences s'y ajoutent, qui restent des hypothèses du programme : l'ancrage des corrélations logiques dans des interactions physiques (R→gravitation, D→forte, H→électromag., L→faible : analogies structurelles, dérivation formelle aux niveaux N_1 – N_2), et la cohérence globale, qui demande que les conditions soient satisfaites ensemble.

Le passage $N_{-1} \rightarrow N_0$ est **logiquement discret**→**physiquement discret** : N_0 est une arène discrète. Son échelle est un étalonnage (on peut identifier la distance entre grains à la longueur de Planck), et la limite continue n'y est pas construite ; le continu de la relativité générale en serait une approximation macroscopique.

8.5 Le déclencheur : auto-référence critique et cristallisation

La section précédente a établi *quand* le passage est possible — lorsque $\mathbb{Z}_4$ est épuisé — et *pourquoi* il a lieu — parce qu'il devient trop coûteux de rester logique. Reste une question distincte, et la plus vertigineuse des trois : qu'est-ce qui *déclenche* le passage ? Une structure stable, cohérente et auto-suffisante n'a par elle-même aucune raison de se dépasser. Un moule parfait peut rester vide indéfiniment.

La réponse du modèle est qu'il n'y a pas de déclencheur extérieur, et qu'il ne peut pas y en avoir : N_{-1} n'a pas d'extérieur (§3.1), et l'argument qui fonde la réversibilité interdit du même coup toute cause externe. Le déclencheur est donc interne, et c'est la boucle elle-même qui, en opérant, engendre les conditions de son propre dépassement.

8.5.1 Une stabilité sous tension

La stabilité de la boucle est d'une espèce particulière. Elle n'est pas un repos mais un équilibre entre deux branches qui ne se neutralisent pas : la superposition des deux orientations (§9.3) tient parce que rien ne départage, non parce que rien ne pousse. Tant que la boucle est considérée seule, cet équilibre est parfait. Mais la boucle n'est jamais seule : dès le premier dédoublement, elle opère au milieu de ses propres produits, les circuits et le réseau du chapitre 4.

Ce que « l'environnement » désigne ici

On lit parfois que la boucle serait entourée d'un foisonnement de structures mathématiques préexistantes qui la perturberaient. Cette description suppose la lecture « plénum » que le modèle écarte (annexe F). L'environnement pertinent n'est pas un stock extérieur : ce sont les *produits du substrat lui-même*, les paliers $N_{-1,k}$ engendrés par le déploiement interne (annexe F). La tension n'est pas subie du dehors, elle est sécrétée du dedans — et c'est précisément ce qui la rend inéluctable plutôt que contingente.

8.5.2 Le seuil d'auto-référence

En se dédoublant, en se différenciant et en se reliant, le réseau atteint inévitablement un point où il contient une représentation de sa propre structure. Ce n'est pas une conscience au sens psychologique : c'est l'auto-référence au sens logique strict, un système assez riche pour se parler de lui-même.

Le théorème d'incomplétude de Gödel s'applique alors. Si le système formel $\mathcal{L}_{\text{RDHL}}$ engendré par la boucle est consistant et suffisamment expressif, il existe une proposition $\mathcal{G}$ qu'il ne peut ni démontrer ni réfuter :

$$\exists \mathcal{G} \in \mathcal{L}_{\text{RDHL}} : \mathcal{L}_{\text{RDHL}} \not\models \mathcal{G} \text{ et } \mathcal{L}_{\text{RDHL}} \not\models \neg \mathcal{G}. \quad (104)$$

$\mathcal{G}$ est une structure que le substrat engendre et ne peut pas résoudre en son sein. Pour être tranchée, elle exige un niveau supplémentaire. C'est en ce sens précis que le débordement est *nécessaire* : N_{-1} ne peut pas contenir toutes ses propres vérités, et ce qu'il n'en peut contenir est N_0 .

Le moment où ce seuil est franchi s'exprime par un décompte. Le réseau cesse de pouvoir être décrit dans son propre langage lorsque sa complexité descriptive dépasse celle de la grammaire qui l'engendre :

$$k^* = \min \{ k \in \mathbb{N} \mid K(\mathcal{N}_k) > K(\mathcal{L}_{\text{RDHL}}) \} \quad (105)$$

où K désigne la complexité de Kolmogorov. Après k^* dédoublements, le réseau compte 2^{k^*} circuits interconnectés et sa proposition gödelienne exige un nouveau niveau.

Deux réserves sur ce seuil

(i) *Sur Gödel.* L'incomplétude vaut pour les systèmes formels capables d'arithmétique. Que le déploiement de $\mathbb{Z}_4$ atteigne cette expressivité n'est pas démontré ici : c'est une hypothèse, rendue plausible par la construction des paliers supérieurs (annexe F) mais non établie. L'énoncé est donc *conditionnel* : si le déploiement atteint le seuil d'expressivité, alors l'incomplétude s'applique. (ii) *Gödel sert deux fois, en sens inverses.* Ici, l'incomplétude **force** la montée d'un niveau : le substrat engendre une proposition qu'il ne peut pas trancher, et il faut sortir pour la résoudre. À N_4 , le même théorème **empêche** la montée : aucun système symbolique assez riche ne se referme, donc N_4 ne sature jamais, donc rien n'appelle un N_5 . *Les deux usages sont compatibles et l'écart tient à la finitude* : $\mathbb{Z}_4$ s'épuise en quatre fonctions, de sorte que l'indécidable n'y a nulle part où aller sinon en haut ; le matériau symbolique ne s'épuise pas, de sorte que l'indécidable y reste indéfiniment absorbable sur place.

(iii) *Sur Kolmogorov.* La complexité K requiert un langage de description, donc une ressource que Π précisément se refusait à emprunter (§8.3). L'équation (105) n'est donc pas une définition interne au substrat mais une **lecture depuis** N_0 du moment où le substrat déborde : elle décrit le seuil, elle ne le constitue pas. Le seuil lui-même est l'épuisement de $\mathbb{Z}_4$, qui est algébrique et n'emprunte rien.

8.5.3 Deux saturations, deux objets

Une précision est nécessaire, faute de quoi le mécanisme qui précède paraîtrait contredire un résultat de l'article N_0 . Celui-ci démontre que la saturation du substrat est **immédiate** : le générateur étant d'ordre quatre et sans point fixe, son orbite sur les quatre configurations d'un site est un cycle transitif unique, de sorte qu'une seule traversée de $R \rightarrow D \rightarrow H \rightarrow L$ les visite toutes. Aucun seuil, aucune accumulation : le site est exhaustif dès le premier tour.

Ce résultat est juste, et il ne concerne pas le même objet que le seuil (105). Il faut distinguer nettement :

La saturation du site. Elle est immédiate et de cardinalité. Quatre configurations, une traversée, rien de plus à distinguer. C'est ce qu'établit l'article N_0 , et c'est ce que dit déjà ici l'épuisement algébrique de $\mathbb{Z}_4$ à $Nf_{-1.4}$.

La saturation du réseau. Elle n'est pas immédiate, puisque le réseau $\mathcal{N}_k$ croît en 2^k (§4.6) et que rien dans un site épuisé n'oblige les sites à se relier. C'est sur cet objet, et sur lui seul, que porte le seuil d'auto-référence.

Les deux se composent au lieu de se concurrencer, et leur articulation est exactement celle que l'article N_0 décrit sous le titre « trois issues, une seule ouverte » : un site étant saturé dès le premier tour, les seules issues sont d'ajouter des bits, ce que la minimalité interdit, d'ajouter des sites sans lien, ce qui fragmente la saturation en secteurs disjoints (proposition du tas de l'article N_0), ou de **relier** des sites. La troisième est la seule, et c'est le réseau. Autrement dit, la saturation immédiate du site est ce qui *rend nécessaire* le passage au relationnel ; l'accumulation sur le réseau est ce qui, ensuite, conduit au débordement. La première répond à « pourquoi des relations ? », la seconde à « pourquoi ces relations finissent-elles par exiger un niveau ? ».

Ce que cela précise

Le « premier temps — l'accumulation » du mécanisme en trois temps est une accumulation *de sites reliés*, et non une accumulation *dans un site*. La distinction n'est pas byzantine : elle décide de la validité du mécanisme, puisque le premier temps serait sans objet si le substrat saturait au premier tour à tous égards.

8.5.4 La cristallisation comme transition de phase logique

Le mot cristallisation est ici exact plutôt qu'imagé. Une solution sursaturée ne se solidifie pas progressivement : à partir d'un unique point de nucléation, l'ordre se propage d'un coup à tout le milieu, une fois le seuil franchi. Le passage de N_{-1} à N_0 suit la même forme. Le substrat est la solution sursaturée, chargée de plus de distinctions qu'il ne peut en tenir dans le registre logique ; la proposition $\mathcal{G}$ est le point de nucléation, l'endroit où la tension se révèle irrésoluble ; N_0 est le cristal.

Formellement, la transition s'écrit comme une brisure de symétrie gouvernée par un potentiel de type Landau. Soit $\phi \in [-1, +1]$ le paramètre d'ordre mesurant le degré de résolution de la superposition, nul tant que les deux branches restent superposées :

$$V(\phi) = -\frac{\lambda}{2}\phi^2 + \frac{b}{4}\phi^4, \quad b > 0, \quad (106)$$

dont les extrema donnent la fourche de bifurcation

$$\phi^* = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \leq 0 \quad (N_{-1} \text{ stable}), \\ \pm\sqrt{\lambda/b} & \text{si } \lambda > 0 \quad (N_0 \text{ émerge}), \end{cases} \quad (107)$$

le paramètre de contrôle étant l'excès de complexité du réseau sur sa grammaire :

$$\lambda = K(\mathcal{N}_k) - K(\mathcal{L}_{\text{RDHL}}). \quad (108)$$

Tant que $\lambda < 0$, le substrat est stable et $\phi = 0$ est l'unique minimum ; à $\lambda = 0$ le point devient critique ; au-delà, $\phi = 0$ devient un maximum instable et deux minima symétriques apparaissent.

Ce que ce modèle établit — et ce qu'il n'établit surtout pas

La fourche (107) rend compte de la **forme** de la transition : son caractère soudain plutôt que graduel, l'existence d'un seuil, et l'apparition de *deux* solutions symétriques là où il n'y en avait qu'une. C'est un acquis réel, et il s'accorde exactement avec le remplissage discret de §8.4. *Ce modèle est une analogie de forme.* La transition que l'article N_0 calcule sur son réseau est d'une autre nature : au-delà du seuil J_c , le vide choisit l'un des deux appariements courts du grain, ce qui ne touche pas l'orientation $\pm i$, et la transition y paraît continue (aucun signe de premier ordre jusqu'à 82 944 grains).

En revanche, ce modèle ne sélectionne **pas** le signe de ϕ^* , et il serait fautif de lui faire dire qu'il le fait. On lit parfois que la boucle « lit sa propre cohérence interne » et se résout vers le pôle le plus consonant avec le réseau, ce qui reviendrait à sélectionner l'orientation par une grandeur interne. Le théorème 5 l'interdit : toute fonctionnelle achirale attribue la même valeur aux deux boucles, et une cohérence mesurée sur le réseau en est une. Les deux racines $\pm\sqrt{\lambda/b}$ sont donc strictement équivalentes du point de vue du substrat, exactement comme les deux orbites miroir. Le potentiel V est symétrique, il le reste, et rien dans N_{-1} ne le penche. Le signe demeure ce que le chapitre 6 en dit : un choix fait à N_1 , et une convention que ce niveau montre inobservable.

8.5.5 Le mécanisme en trois temps

On peut maintenant récapituler le déclenchement sans rien ajouter aux résultats acquis.

Premier temps — l'accumulation. La boucle opère. À chaque parcours, le réseau gagne un palier et le potentiel logique croît, $\Pi_{\text{tot}}^{(k+1)} > \Pi_{\text{tot}}^{(k)}$ (équation (102)). Rien n'est encore résolu ; la réserve grossit.

Deuxième temps — le seuil. La complexité du réseau dépasse la capacité descriptive de sa propre grammaire, λ change de signe, et la structure engendre une proposition qu'elle ne peut plus trancher. C'est l'instant de bifurcation, et il est *exact* : il n'y a pas de zone de transition, pour la raison de finitude déjà donnée.

Troisième temps, l'ouverture du lieu. Les distinctions reçoivent un support : c'est le Bit, la différence rendue portable, et c'est l'acte de N_0 , l'enveloppe linéaire. Cet acte ne brise pas la superposition des deux orientations. Il donne au contraire le droit de superposer, de sorte que N_0 est un socle où les formes et les associations de grains restent en superposition. Aucune branche n'est actualisée à ce passage, et aucune irréversibilité n'apparaît : l'article N_0 établit qu'il n'y a pas de flèche à ce niveau. Le choix entre les deux orientations relève de N_1 , et il y est une convention.

Ce mécanisme ne remplace pas la clôture algébrique : il la complète. La clôture dit que le passage devient possible à $Nf_{-1.4}$; la minimisation des contraintes dit qu'il est avantageux ; l'auto-référence critique dit qu'il est inévitable, parce que le substrat engendre lui-même ce qu'il ne peut pas résoudre. Les trois lectures portent sur la même transition et se renforcent : elles répondent respectivement au *quand*, au *pourquoi* et au *par quoi*.

8.6 Les trois lectures de la transition : une synthèse

Trois arguments distincts, développés en trois endroits de cet article, portent sur le même passage $N_{-1} \rightarrow N_0$. Ils ne se concurrencent pas : ils répondent à trois questions différentes, et il vaut de les mettre côte à côte avant de refermer le chapitre (figure 21).

Leur ordre n'est pas indifférent. La clôture est une condition *nécessaire* : sans épuisement de $\mathbb{Z}_4$, il n'y a pas de place pour un niveau nouveau. La minimisation fournit la *raison* : une clôture n'oblige à rien par

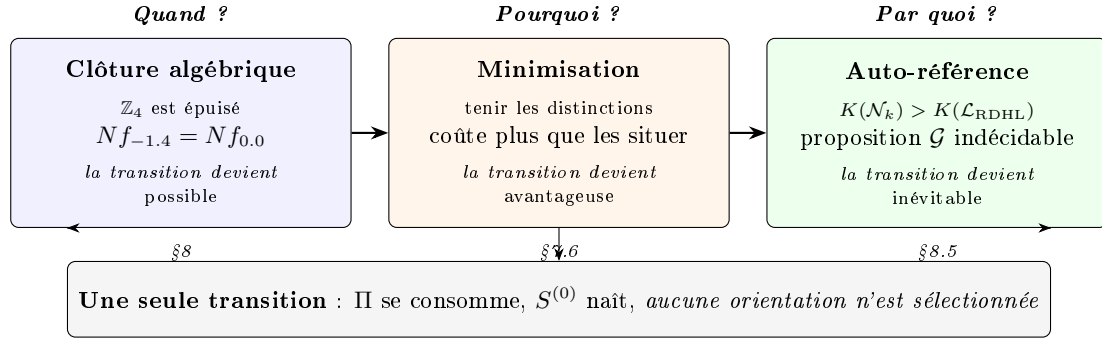


Figure 21: Les trois lectures du passage $N_{-1} \rightarrow N_0$. Elles portent sur la même transition et répondent à trois questions distinctes : la clôture algébrique dit à quel moment le passage est possible, la minimisation des contraintes pourquoi il a lieu, l'auto-référence critique par quoi il se déclenche. Aucune des trois ne sélectionne l'orientation de la boucle, ce que le verrou achiral (théorème 5) interdit à toute grandeur du substrat.

elle-même, et il faut que rester dans le registre logique devienne plus coûteux que d'en sortir. L'auto-référence fournit l'*inéductibilité* : le substrat engendre lui-même la proposition qu'il ne peut pas trancher, de sorte que le coût ne se contente pas de croître, il devient insoutenable.

Une conséquence mérite d'être relevée, car elle vaut pour les trois. Aucune des trois lectures ne dit *quelle orientation* sera retenue. La première est algébrique et symétrique, la deuxième repose sur un coût, donc sur une grandeur achirale, la troisième sur une indécidabilité qui porte sur les deux branches à égalité. C'est cohérent, et ce n'est pas un hasard : le théorème 5 garantit qu'aucune grandeur du substrat ne peut faire ce travail, et l'on devait donc s'attendre à ce que trois arguments indépendants échouent au même endroit. Le signe relève de N_1 , et lui seul.

8.7 La structure de N_0 héritée de N_{-1}

L'émergence de N_0 ne supprime pas N_{-1} ; elle le présuppose. Toute la structure de N_0 est déterminée par celle de N_{-1} qui l'engendre.

Lecture du tableau de synthèse. Le tableau 12 ci-dessous synthétise l'ensemble du programme d'émergence du chapitre. Sa lecture mérite une orientation préalable. Les lignes sont organisées en *quatre catégories structurelles*, dans un ordre allant des invariants les plus universels aux émergences les plus sélectives :

- Les **invariants universels (strate A)** : propriétés présentes dans toute boucle réversible, indépendamment du choix particulier de $\mathbb{Z}_4$. Elles émergent dès N_0 et structurent toutes les lois physiques fondamentales.
- Les **structures géométriques** : éléments de N_{-1} qui se densifient en l'espace-temps lui-même (métrique, vide quantique, seuil d'émergence). Elles forment le *contenant* de la physique.
- Les **opérateurs RDHL** et leur projection aux interactions fondamentales : chaque opérateur s'ancre d'abord dans la métrique de N_0 , puis apparaît comme champ à N_1 , puis comme quanta à N_2 . Cette gradation reflète la nature progressive de l'instanciation physique.
- Les **invariants sélectifs (strate B)** : propriétés liées à des opérateurs spécifiques, qui ne deviennent opérationnels qu'à N_2 lorsque les particules existent (charges, statistiques, nombres leptonique et baryonique).

Les colonnes suivent la séquence d'émergence : chaque structure de N_{-1} est suivie de son mécanisme de transition, puis de ses manifestations successives à N_0 , N_1 et N_2 . La présence d'un tiret « , » dans une colonne indique que l'instanciation à ce niveau n'est pas pertinente (par exemple, les invariants sélectifs n'ont pas d'instanciation à N_0 ou à N_1 car ils requièrent l'existence de particules identifiables). Le tableau se lit ainsi comme la cartographie complète de la projection $N_{-1} \rightarrow N_0 \rightarrow N_1 \rightarrow N_2$, chaque ligne illustrant le mécanisme général de l'émergence sur un cas structurel particulier.

Principe fondamental d'émergence. Deux principes gouvernent la transition :

1. **Durabilité** : la paire de boucles de Gray est la seule à fermer de façon conservative (critère C1) ; elle désigne *quelle* structure peut se complexifier, sans choisir entre ses deux orientations.
2. **Déséquilibre permanent** : la boucle ne peut être en équilibre statique sans cesser d'être durable, garantit *que* la complexification atteint le seuil de N_0 .

L'article N_0 décrit ce passage autrement que par une limite. Il demande au substrat cinq conditions (fidélité de l'action, binarité, non-commutativité des primitives, involutivité, extensibilité du recollement), importe deux théorèmes de mathématiques (Gel'fand–Naimark et Peter–Weyl), et pose un acte, l'enveloppe linéaire. La boucle RDHL en est la graine, au sens où elle fournit les cinq conditions ; elle ne fournit ni les théorèmes ni l'acte.

L'espace-temps physique est le résultat attendu d'un processus logique fondamental : la boucle RDHL en est la graine, la durabilité le critère de sélection, le déséquilibre permanent le moteur. Les structures logiques de N_{-1} ne disparaissent pas : elles deviennent le **substrat invisible de la physique**.

8.8 Les noyaux de cristallisation : du site de proto-information au spin

Le tableau d'héritage indique *ce que* N_0 reçoit de N_{-1} . Il ne dit pas *par quoi* la réception se fait. Une question reste ouverte, et c'est la plus concrète de tout le chapitre : comment une distinction sans support devient-elle une propriété physique quantifiable ? Cette section propose un mécanisme, et en délimite aussitôt la portée, qui est celle d'une hypothèse structurée et non d'un résultat.

8.8.1 Le site de proto-information

Appelons **site de proto-information** une position du réseau $\mathcal{N}_k$ (§4.6) où une distinction est structurée sans être actualisée. Un tel site n'a pas de valeur : il a une *forme* de valeur. Écrire

$$|s_i\rangle_{N_{-1}} = \alpha_i |0\rangle + \beta_i |1\rangle \quad (109)$$

n'est donc pas décrire un qubit. Il n'existe pas d'espace de Hilbert physique à N_{-1} , et la notation n'emprunte au formalisme quantique que sa *syntaxe* : elle exprime que le site porte la structure d'une distinction binaire sans que celle-ci penche d'un côté.

Trois raisons rendent cet état non pas commode mais nécessaire, et elles ne font que reprendre des acquis du chapitre 3.1. D'abord, l'*absence de support* : fixer une valeur exige une interaction — une mesure, un couplage, une décohérence — et aucune de ces opérations n'existe en amont de l'espace-temps. Ensuite, la *réversibilité* : une boucle bijective ne brise aucune symétrie de façon permanente, elle peut pencher puis revenir, et sans support pour retenir l'inclinaison rien ne se fige. Enfin, la *conservation de la discernabilité* : si un site prenait une valeur de façon irréversible, la distinction antérieure serait perdue, ce qui exigerait un extérieur où l'exporter — précisément ce que le substrat n'a pas.

8.8.2 Pourquoi ces sites sont des noyaux

Un noyau de cristallisation est, en physique des matériaux, le point où une phase désordonnée commence à s'ordonner. Par analogie, un **noyau logique** est un site dont la structure interne fournit le point d'ancrage autour duquel une propriété physique s'organisera à N_0 . Trois propriétés déjà établies font des sites de proto-information des candidats naturels.

Binarité structurelle. Le site est organisé autour d'une distinction à deux côtés, ce qui est la définition même du Dit (§18) et la raison pour laquelle la monogamie de l'intrication se déduit d'un décompte (théorème 8). C'est aussi, terme pour terme, la structure algébrique d'un système à deux états.

Orientation. La séquence $R \rightarrow D \rightarrow H \rightarrow L$ dote le site d'une asymétrie directionnelle, celle que porte la longueur orientée δ (§8). Cette orientation n'est pas encore une direction dans un espace : c'est ce qui pourra le devenir lorsqu'un espace existera.

Cohérence. La réversibilité garantit que les relations de phase entre les deux branches sont stables, ce que la construction du théorème 4 établit à partir d'un Dit partagé. Le site est cohérent au sens exact où sa cohérence ne se réduit pas à la donnée séparée de ses branches.

8.8.3 Le mécanisme en trois temps

Saturation. Le réseau accumule des distinctions superposées jusqu'au seuil décrit en (105). Au-delà, la structure ne peut plus être tenue sans support.

Instanciation. Le site acquiert un support minimal — c'est l'ouverture de N_0 , et l'identité $Nf_{-1.4} = Nf_{0.0}$ dit qu'il n'y a pas d'intervalle entre les deux. L'ordre des raisons mérite d'être noté : ce n'est pas le support qui crée le site, c'est le site qui appelle un support.

Cristallisation. Instancié, le site devient un système physique à deux états portant une orientation dans l'espace émergent :

$$|s_i\rangle_{N_{-1}} \xrightarrow{\text{instanciation}} |\sigma_i\rangle_{N_0} = \alpha_i |\uparrow\rangle + \beta_i |\downarrow\rangle. \quad (110)$$

La superposition logique devient superposition, au sens de l'acte de N_0 ; la cohérence logique devient cohérence quantique. L'article N_0 précise ce qui porte ce bit : c'est le grain, dont l'espace d'entrelaceurs a deux états, et dont les deux états de volume défini ont des orientations opposées (sa *main*). Les spins $\frac{1}{2}$ des pattes y sont des étiquettes de géométrie, et non le spin d'une particule : ce niveau n'a ni fermion ni spin de particule.

Trois réserves, qui bornent la portée de cette section

(i) *L'acte non dérivé.* Écrire (109) suppose déjà que les configurations se superposent linéairement. Cette hypothèse n'appartient pas à N_{-1} : elle est l'acte d'ouverture de N_0 , celui dont §9.4 montre la nécessité sans le dériver. Toute cette section en dépend, et n'a donc pas un statut supérieur au sien.

(ii) *Le spin n'est pas dérivé.* Ce qui est proposé est une *correspondance de structure* entre un site binaire orienté et un système à deux états, non une dérivation du moment angulaire, laquelle exigerait le groupe des rotations, donc l'espace, donc N_0 déjà constitué. L'énoncé est : si le spin est la première propriété quantifiable, alors sa forme est déjà celle du site. Il n'est pas : N_{-1} produit le spin.

(iii) *L'orientation n'est pas fixée.* La correspondance vaut pour les *deux* orientations indifféremment, conformément au théorème 5. Elle ne détermine ni le sens du moment angulaire, ni aucun signe.

Bilan critique : ce que l'article établit et ce qui reste à faire

Les lignées transversales qui passent par ce niveau

Six concepts traversent le programme entier en changeant de matériau à chaque étage sans changer de rôle. *Leur développement est consigné dans l'article N_4* , qui est le seul à les avoir tous derrière lui ; le présent article n'en porte que le renvoi, avec ce qu'il en actualise.

la lignée	ce que ce niveau en fait
A. les quatre fonctions <i>RDHL</i>	origine : les quatre composantes de $\mathbb{Z}_4$
B. la boucle, l'escalier, la spirale	origine : la boucle comme critère primordial, l'escalier interne, et $Nf_{-1.4} = Nf_{0.0}$
C. le choix indifférent	origine : les deux orbites <i>RDHL</i> et <i>RLHD</i> , qu'aucune grandeur du niveau ne sépare
D. la non-commutativité	origine : l'invariant B.V, NOT et XOR ne commutant pas
E. la parité	origine : l'invariant B.VI, $\mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2$
F. l'erreur	<i>aucune</i> — les opérations sont des bijections exactes, et rien ne peut manquer à un modèle qui n'existe pas

Quatre lignées sur six prennent ici leur source, ce qui est la raison d'être de ce niveau : il ne décrit rien, il pose ce dont tout le reste sera fait. La cinquième, la boucle, y prend sa source aussi. La sixième n'y commence pas, et c'est un résultat : **l'erreur n'est pas possible au substrat.**

Ce qui réfuterait ce travail

Un modèle fondationnel n'a d'intérêt que s'il peut échouer. Les revendications de cet article sont étroites et, pour cette raison, attaquables sur des points précis. Cinq énoncés suffiraient à les faire tomber, et les trois premiers sont vérifiables par calcul direct, sans expérience ni interprétation.

1. **Un contre-exemple combinatoire.** Exhiber, sur $\{0,1\}^2$, un 4-cycle d'action de Hamming égale à 4 qui ne soit pas dans la classe de Gray ruinerait la sélection de $\{g, g^3\}$, et avec elle l'ensemble de l'édifice (proposition 16).
2. **Une grandeur achirale séparatrice.** Exhiber une grandeur invariante par $g \mapsto g^{-1}$ qui prenne des valeurs distinctes sur *RDHL* et *RLHD* contredirait le verrou (théorème 5) et rendrait superflu le recours à un signe.
3. **Une phase autre que $\pm i$.** Obtenir, par la construction de l'annexe B, une phase géométrique différente de $\pm i$ sur l'orbite de Gray invaliderait la clé proposée.
4. **Une hiérarchie de niveaux sans conservation de R .** Le principe de récursivité prédit que le capital émergent d'un niveau est le capital R du suivant, et que les lois de transition relient des capitaux R adjacents. Une transition inter-niveaux avérée qui ne relierait pas de tels capitaux ferait tomber ce principe, dont dépend la lecture unifiée des constantes.
5. **Un niveau dépourvu de l'une des quatre lois.** La conjecture 3 affirme que chaque niveau possède son équilibre, sa conservation, son second principe et son zéro inaccessible, au changement de nature

de la grandeur près (annexe G). Exhiber un niveau de la hiérarchie où l'une de ces quatre lois n'a pas d'analogue — ou en possède un qui ne se déduit pas de la transposition (135) — ruinerait l'isomorphisme structural (T3), et avec lui la lecture de la hiérarchie comme thermodynamique généralisée. Ce critère ne touche pas le noyau démontré de l'article, mais il touche le cadre qui lui donne son sens.

Les points 1 à 3 relèvent d'une vérification de quelques lignes ; c'est délibéré. Les points 4 et 5 sont d'une autre nature, plus exposés, puisqu'ils engagent une lecture de la physique établie et non un calcul fini ; le cinquième, en particulier, ne met en cause que le cadre trans-niveaux, non les résultats obtenus sur N_{-1} .

Résultats établis

1. **Fermeture conservative comme critère primordial.** La boucle ($g^n = e$, orbite fermée du générateur) est le critère fondamental de N_{-1} , antérieur à la durabilité, qui en est la projection temporelle aux niveaux instanciés. (L'article N_0 emploie le mot dans un sens propre : le compromis entre la complexité des frontières et la liberté des configurations, qui fixe une zone du couplage J .)
2. **Sélection de $\{g^1, g^3\}$ par le seul critère C1.** Le code de Gray sélectionne exactement la paire RDHL/RLHD parmi les six classes de 4-cycles sur $\{0, 1\}^2$; la symétrie axiale de g^2 (C2) et le profil de points fixes (C3) en sont des conséquences, reprises comme Invariants B.I et B.III, démonstration complète (Annexe C).
3. **Structure $\mathbb{Z}_4$ et différenciation différée.** $\{g^1, g^3\}$ se différencient en R et H à N_1 ; $\{g^2, g^4\}$ en D et L au même niveau, par le même acte (le choix de $\pm i$) ; à N_0 , les deux axes restent indifférenciés.
4. **Discernabilité potentielle unifiée.** $\mathcal{D}$ définie comme géodésique dans un graphe pondéré canonique, contenant comme cas particuliers ses deux définitions naturelles (distance opératoire et indice de Jaccard) ; quatre propriétés métriques prouvées (Annexe E).
5. **Durabilité à trois niveaux.** À N_{-1} : $\mathcal{D}_{\text{comb}} = 1/2$ pour les deux boucles (moyenne de Cesàro, Annexe E). À N_0 : $\mathcal{D}_{\text{phys}}^{(N_0)} = \mathcal{D}_{\text{comb}}$ pour les deux, par non-distinction opératoire (conséquence de l'abélianité de $\mathbb{Z}_4$, remarque 16). À N_1 : la durabilité reste la même pour les deux boucles ; ce qui les sépare est le signe que l'acte sélectionne, non un facteur (Annexe E, section 6).
6. **Non-distinction opératoire à N_0 .** Comme unitaires sur $\mathbb{C}^4$, $\sigma_{\text{RDHL}} = \sigma_{\text{RLHD}} = g^2$ (remarque 16). Cette coïncidence est une simple conséquence de la commutativité de $\mathbb{Z}_4$: elle vaut pour les vingt-quatre ordres et ne distingue donc pas cette paire. Son contenu est uniquement négatif, aucune sélection ne peut émerger à N_0 , elle requiert N_1 .
7. **Sélection à N_1 : verrou achiral et phase géométrique.** Aucune grandeur achirale (entropie d'occupation comprise) ne peut séparer RDHL de RLHD sur la période de la dynamique (théorème 5) : la voie des magnitudes est close. La distinction est nécessairement un *signe*, la phase géométrique $\pm i$ de l'orbite de Gray (proposition 8), gauge-invariante et dérivée. Sa réalisation comme phase géométrique, sur la cellule d'aire $h/4$ d'un mode, est établie à N_1 (proposition 10) ; l'article N_1 montre aussi que le signe retenu est une convention inobservable (remarque 20). Seules la non-distinction à N_{-1} et N_0 et l'existence des deux boucles miroir distinguées par $\pm i$ sont acquises ici.
8. **Indistinguabilité RDHL/RLHD à N_{-1} .** Théorème par automorphisme de conjugaison : cohérent avec une flèche du temps qui ne se *sélectionne* qu'à N_1 (à N_0 , aucune observable invariante ne les sépare, et leurs compositions nettes coïncident, cf. ci-dessus).
9. **Dualité spatiale/temporelle depuis $\mathcal{V}(g^k)$.** Quatre lemmes prouvés par calcul direct sur $\{0, 1\}^2$.
10. **Principe de récursivité de R .** Le capital émergent de chaque niveau est le capital R ; les lois de transition, lues comme taux de change ($\kappa_1 = k_B T$, $\kappa_2 = c^2$, $\kappa_3 = c^4/G$, $\kappa_4 = k_B T \ln 2$), relie les capitaux R adjacents.
11. **Passage $Nf_{-1.4} = Nf_{0.0}$.** Remplissage discret des quatre fonctions de $\mathbb{Z}_4$; la clôture L ouvre $Nf_{0.0}$ (Bit) dans lequel R démarre le cycle de N_0 .

Le pari du programme : l'isomorphisme trans-niveaux

Les deux encadrés qui précèdent recensent ce que l'article démontre et ce qu'il laisse ouvert. Il reste à énoncer ce qu'il *parie*, car un pari n'est ni l'un ni l'autre : il n'est pas établi, mais il n'est pas non plus une simple question en suspens. C'est l'hypothèse qui donne son sens à l'ensemble, et c'est à ce titre qu'elle doit figurer dans le corps du texte plutôt qu'en annexe.

Tout ce qui précède décrit une transition unique, $N_{-1} \rightarrow N_0$. Or si cette transition obéit à un mécanisme — remplissage discret, consommation d'un potentiel, débordement par auto-référence — la question se pose immédiatement de savoir si ce mécanisme lui est propre ou s'il est général. Le programme fait le second choix.

Conjecture 3 (Isomorphisme trans-niveaux). *Il existe une suite finie de niveaux $\{N_n\}_{-1 \leq n \leq 4}$ et d'opérateurs de transition $\{\Phi_{n \rightarrow n+1}\}_{-1 \leq n \leq 3}$ telle que, pour tout n dans cet intervalle :*

(T1) **Conservation.** *Le niveau inférieur s'injecte dans le supérieur ; il n'est jamais détruit.*

(T2) **Émergence stricte.** *Il existe au niveau $n + 1$ des propriétés non réductibles à celles du niveau n .*

(T3) **Isomorphisme structural.** *Les lois de $S^{(n+1)}$ sont isomorphes à celles de $S^{(n)}$, au changement de nature de la grandeur près : chaque niveau est une thermodynamique généralisée.*

Le développement formel — structure d'un niveau, propriétés de Φ , transposition des quatre lois, rendement de Carnot et principe de Landauer généralisés — occupe l'annexe G. On se borne ici à ce qui engage l'article.

Pourquoi la suite est finie

L'énoncé porte sur une suite **bornée**, et cette borne n'est pas une prudence de rédaction. L'article N_4 démontre qu'il n'existe pas de N_5 : un niveau naît de la saturation du précédent (Thm. 2, sous ses conditions ; N_4 occupe sa branche d'itération sans borne), et N_4 ne peut pas saturer — son itération est sans borne, un symbole portant sur un symbole sans limite d'ordre ; son matériau ne manque jamais, puisqu'un symbole se copie ; et aucun système symbolique assez riche ne peut se fermer sur lui-même.

Cinq conséquences s'en déduisent, dont le statut varie considérablement et doit être distingué. conjecture entraîne que la thermodynamique n'est pas un chapitre de la physique mais la grammaire de toute hiérarchie émergente, chaque niveau possédant ses quatre lois (C1) ; qu'un niveau serait la frontière du suivant, $N_n \equiv \partial N_{n+1}$ (C2) ; que $S^{(n+1)}$ n'est fonction continue d'aucune $S^{(n)}$, ce qui est la définition formelle de l'émergence forte (C3) ; que chaque niveau introduit sa flèche du temps propre, cohérente avec les autres sans y être réductible (C4) ; et que la frontière informationnelle garde partout la même forme, seule sa nature changeant (C5). Ces cinq énoncés ne se valent pas. C3 et C5 sont des reformulations de ce que l'article établit déjà pour le premier maillon. C1 est l'énoncé le plus fort et le plus exposé. C4 contient deux termes démontrés, l'absence de flèche à N_{-1} (théorème 5) et à N_0 (verrou de l'article N_0), et quatre termes conjecturaux. C2 est *franchement spéculative* et doit être tenue pour telle : elle transporte hors de son domaine un résultat établi dans un cadre précis, et rien dans cet article ne l'appuie ; elle est mentionnée pour être discutée, non pour être utilisée.

Ce que l'article y engage. Le présent travail n'établit pas la conjecture : il en établit le premier maillon, et ce maillon a une propriété singulière. La transition $\Phi_{-1 \rightarrow 0}$ est la seule de la chaîne à ne rien coûter, faute d'une température et d'une entropie au départ ; ce que la transition y engage est le potentiel Π (§8.3), dont la consommation ultérieure sera une actualisation et non une dépense. Loin d'être une exception embarrassante, c'est ce qui fait de N_{-1} le niveau fondateur. La dépendance entre les deux échelles est asymétrique, et il vaut de le dire nettement : si le cadre général est faux, le premier maillon peut rester vrai ; si le premier maillon est faux, le cadre général tombe avec lui.

1. **Canonicité du critère C1 (Annexe C).** La sélection de $\{(1), (3)\}$ repose sur le seul critère C1 (code de Gray) ; C2 et C3 en sont des conséquences. Sa suffisance est prouvée, et sa canonicité est *précisée* : C1 est l'unique cycle de Hamming-action minimale (proposition 16), et cette minimalité n'est pas une optimisation mais l'*unicité*, sous l'atomicité du bit et la raison suffisante, aucune orbite primitive d'action supérieure n'existe (proposition 17). Le résidu se réduit à un unique principe *logique* (la raison suffisante, pré-temporelle), tenu pour constitutif du substrat, non à un argument emprunté à la physique.
2. **Réalisation physique à N_1 : établie.** L'article N_1 réalise la phase géométrique $\pm i$ comme phase du cycle, $\pm\pi/2$, sur la cellule d'aire $h/4$ des deux quadratures d'un mode. Il montre que le signe retenu est une convention inobservable, et que la distinction repose sur une observable T -impaire, non sur une grandeur. Il n'en tire pas d'effet nouveau : la phase géométrique d'une boucle de déplacements est déjà connue et mesurée. L'écart entre les deux sens est d'une demi-frange.
3. **Correspondance avec les interactions fondamentales.** Les rapprochements entre les quatre opérateurs et les interactions du Modèle Standard, écartés de cet article, restent des *analogies heuristiques* ; leur éventuelle dérivation appartiendrait aux niveaux N_1 et N_2 .
4. **Statut des projections énergétiques.** À N_{-1} , le substrat est purement logique et topologique ; les lectures *énergétiques*, comme une éventuelle projection de $\mathcal{D}_0$ vers la constante cosmologique, ou l'interprétation thermodynamique de la bifacialité (le « second principe », remarque 13), sont *héritées* de N_0 – N_1 , non dérivées. Leur éventuel fondement intrinsèque au substrat reste ouvert.
5. **Unicité de $\{0,1\}^2$ comme espace minimal.** Pourquoi 2 bits ? La réponse est donnée ici (proposition 12) et dans l'article N_0 (théorème de saturation) : la fidélité de l'action exige au moins quatre configurations, la binarité une puissance de deux, et la raison suffisante le plus petit nombre de bits, d'où exactement quatre configurations. Ce qui reste ouvert est le statut de la raison suffisante elle-même.
6. **Formalisation complète du foncteur $\hat{\mathcal{H}}$.** Le principe $Nf_{-1.4} = Nf_{0.0}$ formalise le passage. L'article N_0 construit le foncteur en quatre étapes : la catégorie des configurations et des opérations du substrat, l'enveloppe linéaire des morphismes (l'acte), les théorèmes de Gel'fand–Naimark et de Peter–Weyl, puis la restriction au secteur de valence quatre à spins $\frac{1}{2}$. Il transmet la non-commutativité, qui devient $\mathfrak{su}(2)$, et la place d'un bit, jamais sa valeur.
7. **Statut du potentiel logique Π .** La décomposition $\Pi = \Pi_{\text{ext}} \oplus \Pi_{\text{int}}$ découle de la dualité RL/DH déjà établie, et les trois axiomes de la définition 3 fixent un sens de variation sans emprunter à N_0 . En revanche, Π n'est pas une observable et ne reçoit ici aucune valeur ; et l'assignation de chaque composante figée à une entropie physique déterminée — thermodynamique, quantique, informationnelle — reste une hypothèse de programme (§8.3), dont la dérivation appartient aux articles N_0 et N_1 .
8. **Le seuil d'auto-référence.** Le mécanisme du déclenchement (§8.5) repose sur deux emprunts qu'il faut tenir pour tels. Que le déploiement de $\mathbb{Z}_4$ atteigne l'expressivité requise par le théorème d'incomplétude n'est pas démontré : l'énoncé est conditionnel. Et la complexité de Kolmogorov qui définit le seuil (105) requiert un langage de description, donc une ressource de N_0 : elle *décrit* le seuil depuis le niveau supérieur, elle ne le constitue pas. Le seuil constitutif reste l'épuisement algébrique de $\mathbb{Z}_4$, qui n'emprunte rien.
9. **L'isomorphisme trans-niveaux.** La conjecture 3 suppose que chaque niveau possède une grandeur entropique propre et une intensive associée, que ces grandeurs sont reliées par un opérateur de forme constante, et que les quatre lois se transportent sans reste. Aucune des trois n'est établie ici. La première est plausible de N_0 à N_2 , discutable à N_3 , et franchement programmatique à N_4 , où la grandeur intensive sémantique n'a encore que le statut d'un nom.

9 Le spectre de g : d'où vient le i , et pourquoi la phase compte

L'annexe sur la phase géométrique obtient $\pm i$ des aires orientées des deux orbites. *Il existe une seconde voie, plus directe*, et elle livre en outre un résultat que la première ne donnait pas.

Pour le lecteur : le nombre i comme quart de tour

Sur une droite graduée, multiplier par -1 envoie 3 sur -3 : le point saute de l'autre côté de 0. On peut voir ce geste comme un demi-tour autour de 0. Deux demi-tours ramènent au départ, c'est pourquoi $(-1) \times (-1) = 1$.

Cherchons maintenant un nombre qui fasse la moitié de ce geste, un quart de tour. Le faire deux fois doit donner un demi-tour, donc revenir à multiplier par -1 . Appelons ce nombre i :

$$i \times i = -1.$$

Aucun nombre de la droite ne convient (le carré d'un nombre ordinaire n'est jamais négatif) ; il faut donc sortir de la droite et dessiner un plan : 1 à droite, i en haut, -1 à gauche, $-i$ en bas. Multiplier par i fait tourner d'un quart de tour : $1 \rightarrow i \rightarrow -1 \rightarrow -i \rightarrow 1$. Quatre quarts de tour ramènent au départ ($i^4 = 1$). C'est exactement le cadran à quatre positions de $\mathbb{Z}_4$: $+i$ joue le rôle du générateur g . Multiplier par $-i$ tourne dans l'autre sens ($1 \rightarrow -i \rightarrow -1 \rightarrow i \rightarrow 1$) : $-i$ joue le rôle de g^{-1} . L'article montre que le cycle g , dès qu'on accorde le droit de superposer (l'acte de N_0), fait apparaître de lui-même ces quatre nombres : le i n'est pas ajouté, il vient de ce que quatre pas ramènent au départ. Mais $+i$ et $-i$ y figurent ensemble, symétriquement.

Lequel on appelle $+i$ est donc une convention, comme le choix du sens « positif » de rotation sur une feuille : dessiner le plan avec i en bas ne change aucun calcul, et l'article N_1 montre qu'aucune observable ne lit ce choix.

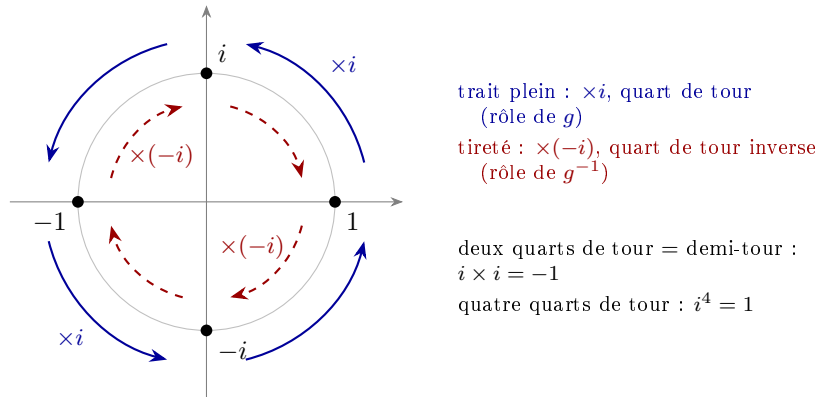


Figure 22: Le nombre i comme quart de tour dans le plan. Multiplier par i fait passer de 1 à i , puis à -1 , à $-i$ et de nouveau à 1 (flèches extérieures) ; deux quarts de tour font le demi-tour « multiplier par -1 », d'où $i \times i = -1$. Multiplier par $-i$ tourne en sens contraire (flèches intérieures, tiretées). Les deux générateurs de $\mathbb{Z}_4$ correspondent à $+i$ et $-i$; lequel s'appelle $+i$ est une convention.

9.1 Le spectre est forcé

Proposition 11 (Les valeurs propres de g sont les racines quatrièmes de l'unité). *Le cycle g est d'ordre 4 : $g^4 = e$. Son polynôme minimal divise donc $X^4 - 1$, et comme g visite les quatre configurations, son spectre est*

$$\text{Sp}(g) = \{1, i, -1, -i\}. \quad (111)$$

Le i n'est donc pas posé : c'est une valeur propre. Et les vecteurs propres associés à $+i$ et $-i$ sont les deux chiralités que les aires identifient.

Le partage avec l'article N_0 mérite d'être fixé, car le même fait s'y trouve établi autrement. *Ce niveau-ci montre que le spectre contient $\pm i$ dès lors que la linéarisation est accordée ; l'article N_0 pose la linéarisation comme son acte, dont il établit la nécessité (sans elle, pas d'algèbre de commutateurs), et il note que le corps $\mathbb{C}$ y est déjà présent, comme facteur de la décomposition de $\mathbb{R}[\mathbb{Z}_4]$, semi-simple (Maschke). Aucun des deux ne rend l'autre superflu : le premier dit ce qu'il y a dans le spectre, le second pourquoi il faut un spectre. Ni l'un ni l'autre, en revanche, ne sélectionne une racine.*

Vérification, Annexe M, bloc J. Diagonalisation directe de la matrice de permutation de g : le spectre est $\{1, i, -1, -i\}$. $\square$

Disposer de i n'est pas le choisir

Il faut se garder d'une lecture trop rapide de cette proposition, car l'article consacré à N_0 énonce ce qui paraît être son contraire : que N_0 ne peut pas **sélectionner** i , et que cette impossibilité constitue précisément sa dette envers N_1 . Les deux énoncés sont compatibles, et leur conjonction est instructive.

Ce qui est établi ici est que i *appartient au spectre* : il n'est pas ajouté au formalisme, il y est contraint par l'ordre du cycle. Mais le spectre contient $+i$ et $-i$, symétriquement, et rien ne désigne l'un plutôt que l'autre — c'est le théorème 5 sous une autre forme. Disposer des deux racines n'est donc pas en choisir une.

L'article N_0 précise d'ailleurs ce que ce choix coûterait, et l'argument mérite d'être connu ici : les grandeurs impaires sous renversement du temps *existent* à N_0 — ce sont les espérances de commutateurs, imaginaires pures — mais elles ne deviennent *observables*, c'est-à-dire réelles, qu'après division par i , et les divisions par $+i$ et $-i$ donnent des résultats opposés. Rendre une grandeur T -impaire observable exige donc de choisir i , et le choix décide du signe. Le verrou achiral et l'indisponibilité de i ne sont pas deux faits mais un seul, lu à deux niveaux.

Deux démonstrations indépendantes du même verrou

Le verrou établi ici et celui que démontre l'article N_0 sont deux théorèmes distincts qui concluent à la même chose. Ils partent du même fait (l'inversion du générateur échange les deux caractères fidèles $\pm i$), mais aucun des deux ne s'appuie sur l'autre.

Celui de cet article est **combinatoire** : il repose sur l'égalité $\mathcal{V}(g) = \mathcal{V}(g^3)$ et sur la conjugaison des deux orbites par la transposition des bits. Il ne suppose ni espace de Hilbert, ni observable, ni opérateur — rien que le décompte sur $\{0,1\}^2$. Celui de l'article N_0 est **spectral**. Le renversement du temps y est pris antiunitaire, $\Theta = K \circ U$ (forme posée comme définition, faute d'énergie), et deux prémisses sont requises : (P1) la conjugaison K n'est pas brisée ; (P2) la partie unitaire U appartient au groupe de symétrie du niveau. Il en tire que toute observable *invariante* du niveau (un élément du commutant) est T -paire.

Le premier vaut avant que l'espace de Hilbert existe, le second dedans. Qu'une conclusion aussi contraignante résiste au changement complet des moyens n'est pas une redondance : c'est l'indice qu'elle tient à la structure et non à l'appareil employé pour l'atteindre.

9.2 La phase relative est observable

Théorème 6 (Deux états différant d'une phase ne sont pas le même état). *Formons $\psi_\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_{+i} + e^{i\theta}v_{-i})$. Les distributions de probabilité sur les quatre configurations sont :*

θ	distribution
0	(0, 0,5, 0, 0,5)
$\pi/2$	(0,25, 0,25, 0,25, 0,25)
π	(0,5, 0, 0,5, 0)

Elles diffèrent. La phase relative n'est donc pas une convention : elle se lit dans les probabilités elles-mêmes.

Vérification, Annexe M, bloc J. Calcul direct des trois distributions ; elles diffèrent deux à deux. □

Et cela fait basculer le régime

Le critère de Hardy compare deux nombres : N , le nombre d'états parfaitement distinguables, et K , le nombre de paramètres d'un état général.

$K = N$	régime classique — un simplexe de mélanges
$K = N^2$	régime quantique

Sur le sous-espace des deux chiralités, $N = 2$; et un état général demande *deux amplitudes complexes*, soit $K = 4 = N^2$.

C'est l'observabilité de la phase qui fait basculer : si elle n'était qu'une convention, on aurait $K = 2$ — un simple segment de mélange, donc du classique.

9.3 La superposition : ce qu'elle est, et ce qu'elle n'est pas

La superposition passe pour la première étrangeté du monde quantique. *Le substrat permet d'en dire quelque chose de précis* — non de la dériver, puisqu'elle est l'acte de N_0 , mais de dire **de quelle nature elle est**.

Pour situer : mélange et superposition

Un **mélange** exprime une *ignorance* : le système est dans l'un ou l'autre état, et nous ne savons pas lequel.

Une **superposition** n'exprime aucune ignorance : *aucun des états n'est réalisé*, et la relation entre eux est physique.

On les confond couramment, et le substrat permet de les séparer par un calcul.

Théorème 7 (Les deux se distinguent, et par un nombre).

	<i>distribution</i>	<i>pureté</i>
<i>mélange 50/50 des deux orbites</i>	(0,25, 0,25, 0,25, 0,25) quelle que soit la phase	0,5
<i>superposition, $\theta = 0$</i>	(0, 0,5, 0, 0,5)	1
<i>superposition, $\theta = \pi/2$</i>	(0,25, 0,25, 0,25, 0,25)	1

Le mélange donne toujours la même distribution — la phase n'y existe pas. La superposition en donne des différentes. *Et la pureté $\text{Tr}(\rho^2)$ vaut 1/2 pour l'un, 1 pour l'autre.*

Ce n'est donc pas une nuance d'interprétation : c'est un nombre.

Vérification, Annexe M, bloc M. Distributions et puretés calculées directement. □

Et le substrat produit une superposition, non un mélange

Cet article établit trois choses sur les deux orbites :

elles ont la **même** action minimale : 4

elles ont la **même** durabilité : 1/2

aucune fonctionnelle spectrale ne les distingue — le verrou achiral

Il n'existe donc aucun fait qui désigne l'une plutôt que l'autre. Ce n'est pas de l'ignorance — ce serait un mélange, de pureté 1/2 — *c'est une absence de fait*.

Et la phase relative étant **observable** (Thm. 6), l'état est **pur**.

Le substrat produit donc une superposition, et le calcul le tranche.

Ce que cela corrige dans le langage courant

formulation	verdict
« être dans deux états à la fois »	faux : aucun des deux n'est réalisé
« on ne sait pas lequel »	faux : ce serait un mélange, de pureté 1/2
« aucun fait ne désigne l'un ni l'autre »	<i>exact</i>
« et la phase entre eux est physique »	<i>exact</i> , et c'est ce qui sépare des deux premières

Les deux formulations courantes sont donc fausses, et pour des raisons opposées : la première réalise trop, la seconde pas assez.

Ce que ce niveau peut et ne peut pas

Il ne dérive pas la superposition : elle est l'acte de N_0 , et l'encadré précédent le dit.

Mais il en établit la nature : le substrat ne connaît aucun fait départageant ses deux orbites, et la phase entre elles se lit dans les probabilités. *Un état sans fait départageant, dont la phase est physique, est une superposition — pas une ignorance.*

L'étrangeté se déplace donc : elle n'est plus qu'un objet soit dans deux états, mais qu'il puisse n'y avoir **aucun fait** là où nous attendions une alternative.

9.4 Ce que cette section fonde : l'intrication quantique

Les deux résultats précédents ne sont pas des curiosités algébriques. *Ils fournissent trois des quatre prémisses de l'intrication quantique* — et la quatrième vient d'un résultat déjà établi de cet article.

La quatrième prémisse : la monogamie

Théorème 8 (La binarité de la distinction fonde la monogamie). *L'article établit que l'alphabet minimal est binaire.* Une distinction sépare donc deux côtés, jamais trois :

deux entités peuvent partager une distinction	✓
trois entités le peuvent-elles ?	✗

C'est exactement la monogamie de l'intrication : une paire maximalelement intriquée exclut tout tiers.

Vérification, Annexe M, bloc L. Décompte immédiat : une distinction binaire a deux côtés. □

Et le partage de monogamie s'ensuit

Un objet portant k distinctions peut être lié à k partenaires — *mais par k distinctions différentes*, jamais deux fois par la même.

C'est la propriété que la mécanique quantique appelle le *partage de monogamie* : l'intrication se répartit, elle ne se duplique pas.

Et elle tombe d'un décompte de N_{-1} , non d'un postulat quantique.

Le partage des rôles entre N_{-1} et N_0

Ce que ce niveau fournit, et ce qu'il ne fournit pas

ingrédient	niveau	d'où
le i	N_{-1}	le spectre de g (Prop. 11)
la phase observable	N_{-1}	Thm. 6
le régime quantique $K = N^2$	N_{-1}	deux amplitudes complexes
la monogamie	N_{-1}	la binarité (Thm. 8)
la <i>superposition</i>	<i>acte de N_0</i>	l'enveloppe linéaire
le recollement des grains	N_0	les faces partagées
les états non factorisables	N_0	aucun état invariant ne factorise
l'intrication elle-même	N_0	

N_{-1} n'est pas le lieu de l'intrication : il en est la condition de possibilité. Quatre ingrédients sur huit y sont établis — et les quatre autres apparaissent avec le *recollement*, qui est de N_0 .

Pourquoi cela vaut d'être dit ici

L'intrication passe pour le phénomène le plus étranger de la physique quantique — une corrélation sans cause locale, sans énergie, sans distance.

Si ses prémisses sont dans le substrat logique, elle cesse d'être une bizarrerie de la matière. **Elle devient une propriété de ce qui précède la matière** : une distinction a deux côtés, et un cycle d'ordre quatre a le i dans son spectre.

L'article N_0 prolonge : une face partagée par deux grains n'est pas factorisable, et l'entropie qu'elle porte vaut exactement $\ln 2$. Il ne dérive pas la violation des inégalités de Bell, qui découle d'un théorème du cadre hilbertien que l'acte introduit ; la borne $2\sqrt{2}$ y est un théorème, non un manque.

Ce que cette section suppose, et qui n'est pas dérivé ici

Écrire g comme une *matrice* et former des combinaisons $v_{+i} + e^{i\theta}v_{-i}$, c'est déjà supposer que les configurations se superposent.

N_{-1} ne fournit qu'une permutation sur quatre configurations : rien n'y oblige à admettre leurs combinaisons linéaires.

Cette supposition n'appartient pas à N_{-1} : c'est l'acte d'ouverture de N_0 , et l'article N_0 la traite comme telle. Les résultats ci-dessus sont donc *conditionnels* — mais leur conditionnement est unique, explicite, et situé.

Et ce n'est pas un emprunt honteux : chaque niveau a son acte

Le programme ne dérive pas tout. *Chaque passage comporte un acte non dérivé, dont on montre seulement la nécessité* :

	son acte	sans quoi
N_0	passer des permutations à leur enveloppe linéaire	<i>pas de commutateur de Lie, donc pas de $\mathfrak{so}(3)$, donc pas d'espace</i>
N_1	choisir l'une des deux racines de -1 ($\pm i$)	pas de dynamique, pas de temps orienté
N_2	la <i>clôture</i> d'une configuration	pas de masse
N_3	la <i>liaison</i>	pas de structure
N_4	le premier lien arbitraire	pas de signification

La **superposition rentre exactement dans ce moule**. Elle n'est ni postulée en secret, ni empruntée à la mécanique quantique : elle est *le premier acte de la série*, et le seul dont tout le reste dépende.

Ce que le programme exige d'un acte est qu'on montre sa nécessité, non qu'on le dérive — et la nécessité de celui-ci se démontre : sans soustraction, pas d'algèbre de Lie, donc pas de dimension trois.

La **discipline est donc respectée, et le compte est tenu** : cinq actes pour cinq passages, tous déclarés, aucun caché.

10 Conclusion : N_{-1} comme substrat invisible de tous les niveaux

Ce que cet article a établi

Parti de la question : *d'où viennent les quatre fonctions fondamentales ?*, cet article a montré qu'elles ne sont pas des axiomes arbitraires : ce sont les seules structures réversibles durables sur $\{00, 01, 10, 11\}$, sélectionnées sans hypothèse physique par le seul critère du code de Gray (C1), les critères auxiliaires C2 et C3 n'en étant que des conséquences algébriques.

L'architecture logique de N_{-1} s'articule autour de quelques résultats : la **discernabilité potentielle** comme capital du substrat et la frontière logique comme acte primordial ; les **quatre composantes de $\mathbb{Z}_4$** comme seules transformations réversibles conservativement fermées ; une **architecture d'invariants** à deux strates, dont les projections universelles (réversibilité, clôture de groupe) deviennent l'unitarité quantique et la permanence des lois ; et le **déséquilibre permanent** comme moteur logique de la complexification, articulé en deux stratégies liées par $RL = DH$.

La sélection et sa logique : l'apport central

Le résultat le plus distinctif concerne le sort des deux boucles miroir RDHL et RLHD, et il s'organise en une hiérarchie de trois niveaux. À N_{-1} , elles sont **indistinguables par toute grandeur symétrique** : conjuguées par l'inversion $g \mapsto g^{-1}$, aucun invariant achiral ne les distingue (la primitive orientée δ , chirale, les départage, mais elle n'est pas une grandeur symétrique). Leurs compositions nettes **coïncident** ($\sigma_{RDHL} = \sigma_{RLHD} = g^2$), par simple commutativité de $\mathbb{Z}_4$, et à N_0 aucune observable invariante ne les sépare (verrou spectral de l'article N_0 , sous ses prémisses P1 et P2). Ces deux résultats sont la signature exacte d'une flèche du temps *sélectionnée*, émergente et non inscrite dans le substrat, une cohérence interne, non une lacune.

La sélection effective ne peut donc survenir qu'à N_1 , et sa logique est la suivante. Un **verrou** (théorème 5) établit qu'aucune *grandeur* achirale (entropie d'occupation comprise) ne peut séparer les deux boucles, parce qu'elles sont images l'une de l'autre par inversion et que le poids combinatoire $\mathcal{V}$ est lui-même achiral. La

distinction ne peut alors être qu'un **signe** : la phase géométrique $\pm i$ que l'orbite de Gray porte sur le plan de phase de Weyl (proposition 8), une quantité T-impair et gauge-invariante. À N_1 , ce $\pm i$ se réalise comme une **phase de Berry**, sur le cycle (proposition 10), la relation de dispersion n'étant pas un ingrédient supplémentaire mais la lecture ondulatoire de l'unique acte qui constitue le niveau. Le *choix* du signe, lui, est une convention, car aucune observable ne le lit. La chiralité se dérive, le sens retenu ne se lit pas.

Le principe unificateur

Au-delà de la sélection, un même schéma opère à tous les niveaux :

$$\text{Minimisation des contraintes} \longleftrightarrow \text{Boucle RDHL} \longleftrightarrow \mathcal{C} \rightarrow \max \quad (112)$$

avec des capitaux différents ($\mathcal{D}, \mathcal{I}, E, m, \mathcal{F}, \mathcal{S}$) et des formes de complexité qualitativement différentes. C'est la propriété **fractale** du modèle microGlobal : la même structure logique, projetée à des niveaux distincts, y engendre des physiques différentes sans changer de grammaire.

Une posture épistémique graduée

Une force revendiquée du programme est de hiérarchiser explicitement le statut de ses énoncés. Sont *démontrés* : la sélection par C1, l'indistinguabilité *par les grandeurs symétriques* à N_{-1} , la non-distinction à N_0 , le verrou achiral, et l'existence de deux boucles miroir distinguées par la phase géométrique $\pm i$. Sont *établis* à N_1 , et crédités ici : la réalisation de cette phase sur la cellule d'aire $h/4$ d'un mode, et le statut du signe, une convention qu'aucune observable ne lit. Ne sont enfin que des *analogies heuristiques*, sans valeur de preuve : les correspondances entre $\mathbb{Z}_4$ et les interactions fondamentales. Cette gradation est la condition d'un programme falsifiable, qui sépare ce qu'il établit de ce qu'il espère.

Ce que la version longue ajoute

Aux résultats qui précèdent, la version longue adjoint quatre constructions dont le statut est différent et qu'il ne faut pas confondre avec eux.

La première est **génétique** : le chapitre 4 reconstruit, à partir de l'état d'indistinction, le premier partage entre système et environnement, puis le circuit logique et son dédoublement en un réseau $\mathcal{N}_k$ de taille 2^k . Cet objet n'est pas décoratif : c'est la seule grandeur du substrat qui *croisse*, et sans elle aucun seuil ne pourrait être défini.

La deuxième est **comptable** : le potentiel logique pur Π (§8.3) nomme ce qui s'accumule là où l'entropie n'est pas définissable, et sa décomposition en composantes extensive et intensive découle de la dualité $RL = DH$ déjà établie. Avec $\mathcal{D}_0$, le substrat dispose des deux grandeurs qui le caractérisent : un plancher qu'il ne peut pas descendre, une réserve qu'il consomme en passant.

La troisième est **mécanique** : le déclenchement de la transition reçoit un mécanisme, le seuil d'auto-référence et la bifurcation (§8.5), et les passages supérieurs en reçoivent un autre, la Rupture comme perturbation dans un milieu couplé (annexe I). La figure 21 montre comment ces lectures se composent sans se concurrencer. Aucune ne sélectionne d'orientation, et c'est ce qu'on attendait.

La quatrième est **architecturale** : les critères de saturation niveau par niveau (§2.6.9), la formalisation du capital $\mathcal{C}_x$ (annexe H) et la conjecture d'isomorphisme trans-niveaux (§8.8.3) donnent au premier maillon le cadre qui lui donne son sens. Ce cadre est un pari, l'article le dit et le tableau 20 le consigne ligne à ligne.

Trois questions supplémentaires restent ouvertes du fait de ces ajouts, et le bilan critique les enregistre : le statut de Π , qui n'est pas une observable et dont la tripartition en entropies demeure une hypothèse ; le seuil d'auto-référence, qui emprunte à Gödel une expressivité non démontrée et à Kolmogorov un langage de description qui appartient à N_0 ; et la conjecture d'isomorphisme elle-même, dont les trois présupposés perdent en plausibilité à mesure que l'on monte vers N_4 .

Ce que le programme laisse ouvert

Trois chantiers majeurs demeurent, d'inégale maturité. La **canonicité du critère C1** est la plus avancée : C1 sélectionne la bonne paire, en est l'unique cycle de Hamming-action minimale (proposition 16), et cette minimalité est l'*unicité*, non une optimisation (proposition 17) ; il ne subsiste qu'un unique principe *logique*, la raison suffisante pré-temporelle, tenu pour constitutif du substrat (Annexe C). La **réalisation physique** à N_1 est faite (cellule d'aire $h/4$ d'un mode, phase $\pm\pi/2$, observable T-impair) ; il reste à N_1 à établir sur l'arène de N_0 l'inventaire des lieux d'une perturbation. La **dérivation formelle des correspondances** : les rapprochements avec les groupes de jauge restent heuristiques ; leur éventuelle dérivation appartient aux niveaux N_1 et N_2 , où les prédictions du modèle deviendront testables.

N_{-1} comme substrat invisible

Si le modèle est juste, les structures de N_{-1} ne disparaissent pas dans la transition vers N_0 : elles deviennent le **substrat invisible de la physique**. Chaque loi de conservation est la projection d'un invariant logique ; l'unitarité quantique, la projection de la bijectivité ; la permanence des lois physiques, la projection de la clôture de groupe ; et la flèche du temps, celle qui s'éloigne d'un état initial pur, nommée par un signe qui est le même partout et qu'aucune observable ne lit.

La physique serait alors la logique de N_{-1} vue depuis l'intérieur de l'espace-temps qu'elle a elle-même engendré. Les grandes questions (*Why these laws and not others ?*, *Why is mathematics so unreasonably effective ?*) y trouveraient une amorce de réponse dans la structure de $\mathbb{Z}_4$: l'existence de ces lois, via les invariants ; l'efficacité de la mathématique, si la physique est une réalisation particulière d'une structure logique sous-jacente.

Ces réponses sont des hypothèses du programme, non des conclusions acquises. Les articles sur N_0 et N_1 en établissent une partie ; les suivants devront les vérifier et les compléter. La logique a posé les fondements ; la physique devra les confirmer.

A Le programme microGlobal : vue d'ensemble

Le cadre dont relève cet article n'est pas encore connu, et le corps du texte l'emploie sans le justifier, ce qui exposerait le lecteur à prendre pour un habillage sémantique ce qui est une thèse. Cette annexe expose donc, en propre, ce que le programme microGlobal [1] soutient, d'où viennent les quatre noms R , D , H , L , et surtout *ce dont les résultats démontrés ici ne dépendent pas*. Elle est un résumé, non une démonstration : les justifications appartiennent au premier volet du programme.

P.1 La question dont le programme procède

microGlobal part d'une question simple : pourquoi l'univers a-t-il produit des structures de plus en plus complexes plutôt qu'une soupe homogène ? La réponse proposée est qu'il existe une **logique trans-scalaire** orientant tout système vers la *minimisation de ses contraintes*, et que cette minimisation engendre nécessairement de la complexité. La même logique opérerait à toutes les échelles, avec des *capitaux* différents — c'est ce que le programme appelle sa **propriété fractale**.

Le terme demande une précision, car il prête à confusion. À la différence des fractales géométriques, où c'est une *forme* qui se répète, l'objet est ici *systémique* : c'est la même structure à quatre opérateurs qui se rejoue d'échelle en échelle. Aucune auto-similarité géométrique n'est impliquée. Surtout, cette réinstanciation n'a pas partout la même solidité, et le programme le reconnaît explicitement. Aux niveaux **bas** — N_{-1} et sa projection à N_0 — le groupe $\mathbb{Z}_4$ est *réellement* instancié, et l'on peut parler d'identité algébrique au sens strict : c'est l'objet du présent article. Aux niveaux **hauts** — matière organisée, vivant, social — la « structure à quatre » est pour l'essentiel une **typologie descriptive**, féconde mais non construite. L'invariance vaut donc comme identité en bas et comme analogie en haut, et cet article ne revendique que la première.

P.2 D'où viennent les quatre fonctions

Le programme décrit tout système auto-organisé par quatre fonctions élémentaires. Ces quatre fonctions ne sont pas une liste établie par inventaire, ce qui les rendrait arbitraires et révisables : elles sont *entièrement déterminées* par trois variables relationnelles, et par elles seules. Étant donné un flux entre un système et son environnement, on demande s'il y a **hiérarchie** entre les termes (le rapport est-il asymétrique ?), s'il y a **réciprocité** (l'échange va-t-il dans les deux sens ?), et quelle en est la **temporalité**. Le croisement de ces réponses ne laisse place qu'à quatre configurations :

- **R , Reproduction** : flux asymétrique *sortant*, sans réciprocité. Le système propose son identité au dehors — division cellulaire, propagation d'une onde, rayonnement. Ce qui sort a de la valeur, et l'environnement garde le pouvoir de l'accepter ou de le refuser.
- **D , Différenciation** : flux réciproques égaux. Le système échange et se spécialise — réaction chimique, mutation, échange.
- **H , Hiérarchisation** : flux asymétrique *entrant*. Le système prélève, intègre et s'organise.
- **L , Liaison** : flux internes réciproques, et flux externe *nul en valeur* pour le système qui l'émet. Le système noue ses liens internes et clôt sa frontière — liaison chimique, membrane. Nul en valeur ne signifie pas nul en débit : ce qui franchit la frontière est ce que le système a rejeté hors de son identité.

Ces quatre fonctions sont tenues pour **nécessaires et suffisantes** : sans l'une d'elles, aucun système ne se maintient durablement auto-organisé. Trois d'entre elles (R , D , H) sont *transactionnelles*, au sens précis où leur flux n'a lieu que si un partenaire l'accepte — non qu'un flux revienne en sens inverse, R et H restant directionnels, mais qu'ils supposent en face un système qui les reçoive ; un partenaire qui refuse se découple, et cesse du même coup d'être l'environnement de ce système. L est *unilatérale* d'une tout autre façon : son flux de sortie existe, mais il se décharge dans ce qui n'est justement pas couplé au système, de sorte que nul n'a rien accepté et que personne n'a le pouvoir de refuser.

L'équilibre des quatre définit ce que le programme nomme **complexité**, mesurée par le produit $\mathcal{C} = C_R \times C_D \times C_H \times C_L$, dont la propriété cardinale est qu'un seul capital nul l'annule : un système n'est complexe que si ses quatre fonctions sont toutes pourvues.

P.3 Un avertissement sur les noms

Les lettres R , D , H , L nomment *d'avance* ce que les quatre composantes de $\mathbb{Z}_4$ deviendront aux niveaux supérieurs. À N_{-1} , ce ne sont que des préfigurations algébriques, et leur pleine différenciation sémantique ne s'accomplit qu'à mesure que la physique émerge (§3.7.2). Les noms sont donc employés par anticipation, et le lecteur qui les juge prématurés peut les remplacer partout par g , g^2 , g^3 , g^4 sans qu'aucune démonstration en soit affectée.

Le programme distingue par ailleurs deux ontologies que le langage courant mélange, et dont la confusion rendrait le corps de l'article inintelligible. Les **fonctions** (Nf) sont des verbes : des transformations, les règles de composition, la grammaire d'un niveau ; on n'en observe que les effets. Les **systèmes** (Ns) sont les noms : les entités auto-organisées qui émergent de l'assemblage des fonctions, délimitées par une frontière et dotées d'une identité. À N_{-1} on rencontre successivement quatre systèmes — le Dit, la porte, la boucle RDHL, les assemblages. Le rapport des deux est celui de la grammaire à la phrase (§2.3).

P.3 bis La même raison fixe le *nombre* de configurations

La proposition 17 applique les engagements (a), (b) et (b') aux *transitions*. Ils s'appliquent aussi bien au **registre**, et l'on en tire un second résultat, que l'article N_0 établit de la même façon (théorème de saturation à quatre configurations).

Proposition 12 (La minimalité n'est pas un postulat séparé). *Sous l'engagement (b) — le substrat ne porte aucune distinction sans fondement — le nombre de configurations du substrat est le **plus petit** compatible avec ses contraintes, soit $2^2 = 4$.*

Proof. La fidélité de l'action de $\mathbb{Z}_4$ exige au moins quatre configurations ; la binarité du Dit impose que leur nombre soit une puissance de deux. Soit n le nombre de bits, $n \geq 2$. Supposons $n \geq 3$. Le troisième bit porte une distinction que rien n'exige : ni la fidélité, qui est déjà satisfaite, ni la binarité, qui ne contraint que la forme du nombre. C'est donc une distinction **sans fondement**, exclue par (b). D'où $n = 2$. $\square$

Ce que cela requalifie

« **Minimalité** » n'est donc pas une règle de simplicité, ni un rasoir d'Occam appliqué à la construction. C'est l'engagement (b) lu sur la cardinalité au lieu des transitions — exactement comme la moindre action de Hamming en est la lecture sur les pas.

Les deux résultats ont donc la même source, et le programme n'a pas deux postulats de minimisation mais un seul engagement, employé deux fois :

appliqué aux	donne
transitions	un bit par pas : le critère de Gray (Prop. 17)
registre	deux bits en tout : la minimalité (Prop. 12)

Pourquoi (b) lie N_{-1} et se relâche au-dessus

Une objection se présente : si le principe de raison suffisante valait partout, les niveaux supérieurs ne pourraient porter aucune donnée non fondée. Or N_0 en porte deux — les deux orientations que son verrou achiral l'empêche de sélectionner. L'engagement serait donc violé un niveau plus haut.

Il ne l'est pas, et l'asymétrie tient à la position. Une donnée non fondée à N_0 n'est pas sans fondement possible : elle est différée, et le niveau suivant la fixe, comme une convention qu'aucune observable ne lit (ce n'est donc pas un reste) ; c'est tout le contenu de la dette. À N_{-1} , il n'y a rien en dessous, et rien au-dessus ne peut revenir fixer la taille du substrat, puisque tout ce qui vient après est construit sur elle. Une donnée non forcée y serait donc définitivement arbitraire, non différée.

L'engagement (b) se formule alors exactement : un niveau ne peut porter une distinction sans fondement que si un niveau ultérieur peut la fonder. N_{-1} est le seul à qui cette clause ne bénéficie pas, et c'est pourquoi il est le seul qui doive être minimal.

Ce qui réfuterait l'argument : exhiber une donnée structurelle de N_{-1} qui ne soit pas forcée et qui reçoive pourtant sa valeur d'un niveau supérieur. La prémisse — rien ne peut fixer après coup — tomberait, et la minimalité redeviendrait une préférence.

P.4 Les six niveaux, leurs capitaux, leurs taux de change

Le programme organise la nature en six niveaux emboîtés, chacun caractérisé par un **capital** — la grandeur qui s'y conserve, s'y accumule, et dont la saturation ouvre le niveau suivant. Le substrat N_{-1} a pour capital la discernabilité ; N_0 , l'espace-temps, a l'information ; N_1 , les ondes, l'énergie ; N_2 , les particules, la masse ; N_3 , le vivant, la forme ; N_4 , le social, le sens (table 1).

L'articulation entre niveaux est le point où le programme engage le plus. La thèse est qu'un passage $N_k \rightarrow N_{k+1}$ n'est pas une juxtaposition mais une **conversion** : le capital d'un niveau se change dans celui du suivant, au facteur d'une constante fondamentale. Lues ainsi, les constantes de la physique cessent d'être des paramètres bruts pour devenir des *taux de change* entre registres successifs, dans l'esprit du cube $c-G-\hbar$.

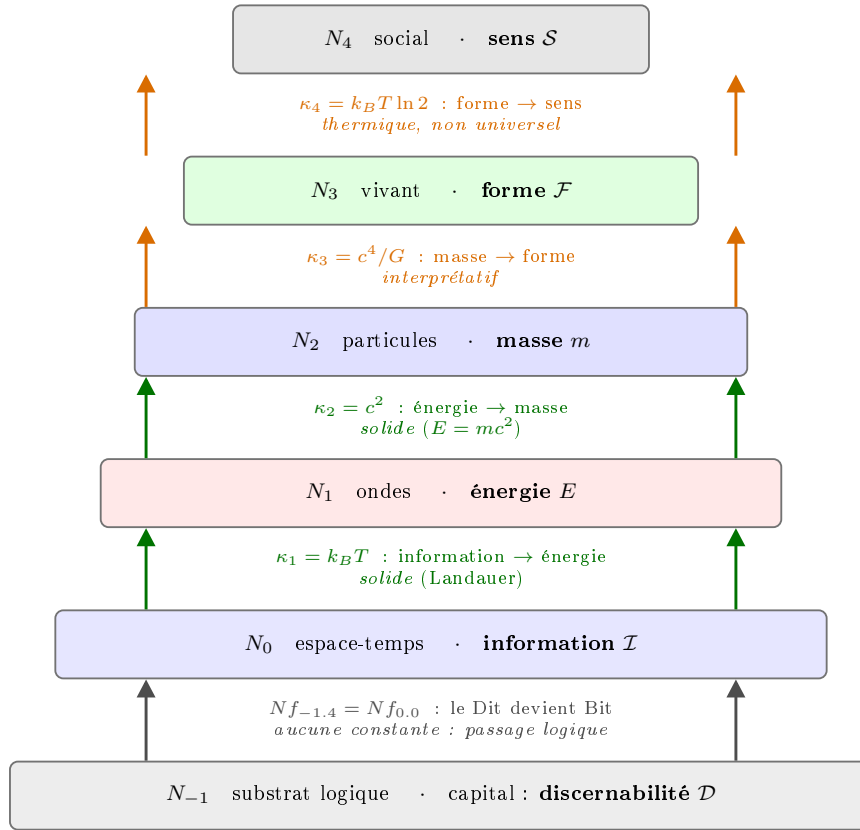


Figure 23: **La pyramide des niveaux et leurs taux de change.** Chaque niveau repose sur le précédent et possède son propre capital ; la largeur décroissante figure le rétrécissement du domaine, non une quantité. À chaque passage, le capital se convertit dans celui du niveau supérieur au facteur d’une constante fondamentale. *Le premier passage fait exception* : il ne coûte aucune constante dimensionnée, puisque rien n’est encore dimensionné — c’est l’objet du présent article. *La couleur marque le statut des suivants* : solide pour κ_1 et κ_2 , interprétatif pour κ_3 , *thermique et non universel* pour κ_4 — établi à N_4 . Cette lecture des constantes comme taux de change est une thèse du programme, non un résultat de cet article ; elle n’intervient dans aucune démonstration.

Une remarque sur les deux extrémités. Le lecteur aura noté que $\kappa_1 = k_B T$ et $\kappa_4 = k_B T \ln 2$ ne diffèrent que d’un $\ln 2$. **Ce $\ln 2$ appartient à l’énoncé, non au taux** : c’est la taille d’un bit en unités naturelles. Au bas de l’escalier, κ_1 convertit une entropie en énergie ; au sommet, κ_4 convertit de l’énergie de configuration en sens, compté en bits, d’où son $\ln 2$. *La chaîne s’ouvre et se ferme sur la même relation de Landauer, prise dans les deux sens.*

Il suit de là que **l’escalier ne compte que deux constantes universelles**, c et G , au milieu, et **une relation thermique employée deux fois** aux extrémités. Le critère est celui du cube lui-même : un taux est universel si et seulement s’il est composé de constantes du cube. Or k_B n’y figure pas — c’est une conversion d’unités, et l’on pourrait mesurer les températures en joules — et T est un état du milieu, non une constante. *Les deux marches thermiques sont donc celles qui touchent à un terme qui n’est pas un invariant* : en bas la température, en haut l’interprète.

Une mise en garde, pour écarter un contresens. Que la monnaie de compte revienne à son point de départ **ne fait pas de l’escalier une boucle** : ce qui se referme est l’unité, non la suite des niveaux. Le sens ne redevient pas de l’espace, et l’argument de clôture du programme — il n’y a pas de N_5 — ne dépend d’aucun taux de change.

Deux réserves, que le programme assume. La première tient au statut inégal des marches, indiqué par la couleur : les deux premières s’appuient sur des relations établies, les suivantes relèvent de la glose, et il serait malhonnête de présenter l’escalier comme un tout homogène. La seconde est que le premier passage, $N_{-1} \rightarrow N_0$, n’a pas de taux de change : il ne convertit rien, puisqu’il n’y a encore aucune grandeur dimensionnée à convertir. C’est le seul passage que le présent article prétende établir.

P.5 Les deux boucles : complexité et entropie

Les quatre fonctions se composent en un cycle, et ce cycle peut être parcouru dans deux sens. La **boucle RDHL** — reproduire, différencier, hiérarchiser, lier — est celle qui *construit* : elle accumule du capital, referme

une frontière, et fait croître la complexité. La **boucle inverse RLHD dégrade** : le capital se dissipe au dehors, la frontière se défait, et l'on retrouve, au niveau instancié, ce que la thermodynamique appelle production d'entropie. Une même grammaire, donc, et deux destins opposés selon l'orientation du parcours.

C'est précisément là que le présent article intervient, et il convient de dire dans quel sens. Il ne démontre pas que RDHL construit et que RLHD dégrade — cette lecture appartient aux niveaux instanciés. Il établit un résultat plus étroit et plus dur : à N_{-1} comme à N_0 , **rien ne distingue les deux boucles**. Aucune grandeur achirale ne les sépare (à N_0 , sous les deux prémisses de son verrou spectral), et leurs compositions nettes sont le même élément g^2 . La différence entre construire et dégrader n'est donc pas inscrite dans le substrat ; elle suppose un porteur — un signe, la phase géométrique $\pm i$ — dont la réalisation appartient à N_1 . Le programme reçoit ici moins une confirmation qu'une contrainte : il ne peut pas placer à la base ce qui ne s'y trouve pas.

P.6 Ce que cet article emprunte

Le corps du texte importe du cadre général quatre choses, qu'il ne démontre pas : (i) les noms des quatre fonctions et leur caractérisation par les trois variables relationnelles ; (ii) la notion de *capital* d'un niveau et le mécanisme de sa saturation ; (iii) la hiérarchie des six niveaux et la thèse selon laquelle le capital émergent porte les propriétés de l'opérateur dominant ; (iv) la mesure multiplicative de la complexité. Le chapitre 2 les énonce ; leurs démonstrations sont distribuées dans les autres articles de la série.

P.7 Ce dont il ne dépend pas

C'est le point décisif, et il vaut mieux l'énoncer sans détour : *un lecteur qui rejetterait en bloc le programme microGlobal devrait néanmoins accepter les trois résultats centraux de cet article*, car aucun ne fait appel aux emprunts ci-dessus.

- (i) La **sélection de la paire** $\{g, g^3\}$ par le critère de Gray, et le fait que ce critère soit l'unique boucle d'action de Hamming minimale (annexe C), sont des énoncés combinatoires sur les permutations de $\{0, 1\}^2$. Ils se vérifient par énumération finie, sans qu'aucune fonction soit nommée.
- (ii) Le **verrou achiral** (théorème 5) est un argument de conjugaison dans un groupe fini : les deux boucles étant échangées par l'inversion $g \mapsto g^{-1}$, toute grandeur invariante sous cette inversion leur attribue la même valeur. Rien n'y suppose une interprétation des opérateurs.
- (iii) La **phase géométrique** $\pm i$ (annexe B) se calcule à partir de la seule non-commutation des primitives, comme aire enclose sur le plan de phase de Weyl, une fois admise l'enveloppe linéaire (l'acte de N_0 , déclaré, et non un emprunt au cadre).

Les emprunts deviennent en revanche réellement porteurs à deux endroits, et le lecteur doit le savoir pour pondérer sa lecture : le chapitre 8 sur la transition vers N_0 , qui suppose la notion de capital et sa saturation, et le principe de récursivité de R , qui suppose la hiérarchie des niveaux. Ces deux développements sont *conditionnels* au cadre ; les trois résultats ci-dessus ne le sont pas.

B Phase géométrique discrète de l'orbite de Gray

Cette annexe démontre la proposition 8 : sur le plan de phase de Weyl associé aux bits (b_0, b_1) , l'orbite de Gray porte une phase géométrique discrète $i^{\mathcal{A}} = \pm i$, dont le signe est fixé par l'orientation du parcours. Ce résultat appartient à N_{-1} ; il ne fait intervenir que la structure non-commutative du substrat ; sa *réalisation physique* comme phase de Berry d'une onde (transport adiabatique) relève, elle, de l'article N_1 .

Construction

On équipe $\{0,1\}^2$ d'une structure de plan de phase : b_0 joue le rôle de position, b_1 celui d'impulsion. Les opérateurs de Weyl du système $\mathbb{Z}_4$ (avec $\omega = e^{2i\pi/4} = i$) sont le décalage X et l'horloge Z :

$$X |x\rangle = |x+1 \bmod 4\rangle, \quad Z |x\rangle = i^x |x\rangle, \quad ZX = iXZ. \quad (113)$$

La relation $ZX = iXZ$ est la non-commutativité NOT/XOR du substrat ; c'est elle qui rend la phase non triviale. L'opérateur de déplacement est $D(a,b) = X^a Z^b$, et la relation de Weyl donne la loi de composition

$$D(a_1, b_1) D(a_2, b_2) = i^{a_2 b_1} D(a_1 + a_2, b_1 + b_2). \quad (114)$$

La phase est l'aire enclose

Les quatre états de Gray $|00\rangle, |01\rangle, |11\rangle, |10\rangle$ sont les points $(b_0, b_1) = (0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$: les sommets d'une cellule du plan de phase. Le long d'une boucle fermée, les exposants cumulés de X et Z reviennent à zéro ; par (114), le produit ordonné des déplacements élémentaires se réduit donc à une *phase pure* fois l'identité, dont l'argument est la somme des contributions $i^{\Delta a \cdot b}$, c'est-à-dire l'aire orientée enclose (formule du lacet) :

$$\prod_{\text{boucle}} D(\Delta a, \Delta b) = i^{\mathcal{A}} \mathbb{I}, \quad \mathcal{A} = \text{aire orientée enclose}. \quad (115)$$

L'orbite de Gray enlôte une cellule unité (figure 24) : $\mathcal{A} = +1$ dans le sens trigonométrique (orbite de g , RDHL), $\mathcal{A} = -1$ dans le sens horaire (orbite de g^3 , RLHD). D'où

$$\boxed{\prod_{\text{orbite } g} D = +i \mathbb{I}, \quad \prod_{\text{orbite } g^3} D = -i \mathbb{I}} \quad (116)$$

ce qui établit la proposition 8. La phase est manifestement T-impair : elle change de signe sous le renversement de l'orientation, contrairement à toute grandeur achirale, conformément au théorème 5.

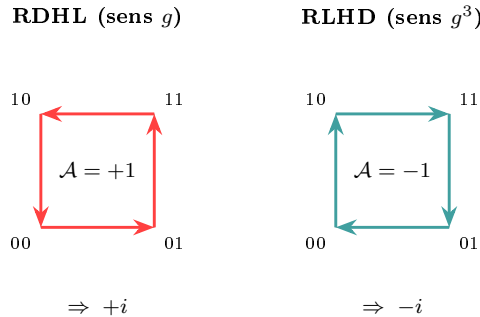


Figure 24: La chiralité de la phase géométrique. Sur la cellule de Gray du plan de phase de Weyl (b_0, b_1) , l'orbite RDHL (sens trigonométrique) enlôte une aire orientée $\mathcal{A} = +1$ et porte la phase $i^{\mathcal{A}} = +i$; son inverse RLHD enlôte $\mathcal{A} = -1$ et porte $-i$. Ce signe, T-impair, est la seule grandeur distinguant les deux orbites, origine conjecturale de la flèche du temps à N_1 .

Pourquoi $\mathbb{Z}_4$ et non $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

La construction ci-dessus emploie les opérateurs de Weyl du système $\mathbb{Z}_4$, avec $\omega = i$, tout en étiquetant le plan de phase par les deux bits (b_0, b_1) . Ce mélange doit être justifié, car la lecture la plus naturelle d'un plan de phase à deux bits serait $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, avec $\omega = -1$; et elle ne donne pas le même résultat.

Proposition 13 (La lecture $\mathbb{Z}_2$ est achirale). *Sur le plan de phase $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, avec des déplacements involutifs et $\omega = -1$, l'holonomie de la cellule unité vaut*

$$(-1)^{\mathcal{A}} = -1 \quad \text{pour } \mathcal{A} = +1 \text{ comme pour } \mathcal{A} = -1, \quad (117)$$

puisque -1 est sa propre inverse. Cette holonomie ne *sépare pas* les deux orientations de l'orbite.

Vérification, annexe M. Calcul direct du produit ordonné des déplacements de Pauli le long du périmètre de la cellule : le résultat est $\not\equiv$ dans les deux sens de parcours. $\square$

Le choix de $\mathbb{Z}_4$ n'est donc pas une commodité : il est **contraint par la fonction même** que la phase doit remplir. Le théorème 5 établit qu'aucune grandeur achirale ne peut distinguer les deux boucles ; une holonomie qui vaut -1 dans les deux sens est achirale et tombe donc sous le coup du verrou. Seule la structure d'ordre quatre produit une quantité impaire sous renversement de l'orientation, $+i$ contre $-i$. L'ordre du groupe qui a été sélectionné par le critère de Gray est ainsi le même que celui qui rend la phase chirale, et cette coïncidence n'en est pas une : c'est le même $\mathbb{Z}_4$ qui agit dans les deux rôles.

Une conséquence pour la lecture de l'article N_1

Une holonomie $\mathbb{Z}_2$, $g^2 = -1$, rattachée à une phase géométrique de π , serait *achirale* : elle vaut -1 dans les deux sens, et la proposition 13 montre qu'elle ne peut pas porter la chiralité. *L'article consacré à N_1 ne s'y appuie pas* : il établit que le transport compose les déplacements de Weyl, et que ce qui sépare les deux sens est la phase géométrique du **cycle**, $\pm\pi/2$, soit $+i$ contre $-i$ — l'ordre quatre, non l'ordre deux.

Ce qui appartient à N_{-1} , et ce qui relève de N_1

Un dernier point de portée. L'objet établi ici est l'**holonomie de Heisenberg du chemin** : le produit ordonné des opérateurs de déplacement le long de l'orbite, égal à $i^A \not\equiv$. C'est un résultat de N_{-1} , il ne fait intervenir que la non-commutativité du substrat, et il est invariant de jauge sous le rephasage contraint par $D(-a, -b) = D(a, b)^{-1}$.

Il ne faut pas le confondre avec une quantité voisine et distincte : la **valeur propre accumulée** par un état transporté par g lui-même. Celle-ci vaut $\chi_1(g^k) = i^k$, donc i pour un pas et 1 pour le cycle entier, puisque $g^4 = e$. Les deux grandeurs portent sur le même chemin sans être la même chose : l'une compose des déplacements, l'autre itère un générateur.

Quel transport se réalise à N_1

Savoir laquelle des deux se réalise physiquement à N_1 revient à savoir *quel opérateur y implémente le transport* — la suite des déplacements de Weyl, ou le générateur g . Cette question n'appartient pas à N_{-1} . Ce que N_{-1} établit, dans les deux cas, est que la chiralité est lisible par un signe : $+i$ contre $-i$ pour l'holonomie du chemin, $+i$ contre $-i$ par pas pour le générateur.

L'article N_1 établit que le transport y compose les déplacements de Weyl, et que c'est l'holonomie du chemin, $\pm\pi/2$ sur le cycle, qui se réalise comme phase géométrique (proposition 10).

Vérification numérique

Le script suivant (Python 3, NumPy) construit explicitement X , Z et le produit des déplacements le long des deux orbites, et confirme que ce produit est bien une phase pure $\pm i$, avec l'aire ± 1 attendue.

```

1 # Phase geometrique discrete de  $\mathbb{Z}_4$  sur le plan de phase de Weyl.
2 # Verifie que l'orbite de Gray porte la phase  $i^{\text{aire}} = +i$  (sens  $g$ ) /  $-i$  (sens  $g^3$ ).
3 import numpy as np
4 from numpy import pi
5
6 N = 4
7 w = np.exp(2j*pi/N) # omega = i
8 X = np.zeros((N, N), complex) # decalage :  $X|x\rangle = |x+1 \bmod 4\rangle$ 
9 for x in range(N):
10     X[(x+1) % N, x] = 1.0
11 Z = np.diag([w**x for x in range(N)]) # horloge :  $Z|x\rangle = i^x |x\rangle$ 
12 # relation de Weyl :  $Z X = i X Z$  (non-commutativite NOT/XOR)
13
14 def D(a, b): # deplacement de Weyl  $D(a,b) = X^a Z^b$ 
15     return np.linalg.matrix_power(X, a) @ np.linalg.matrix_power(Z, b)
16
17 def phase_boucle(points): # produit ordonne des déplacements
18     M = np.eye(N, dtype=complex)
19     for k in range(len(points)-1):
20         da = points[k+1][0] - points[k][0]
21         db = points[k+1][1] - points[k][1]
22         M = D(da, db) @ M
23     scalaire = np.allclose(M, M[0, 0]*np.eye(N))
24     return np.angle(M[0, 0]), scalaire

```

```

25
26 def aire(points):                # aire orientee (formule du lacet)
27     A = 0.0
28     for k in range(len(points)-1):
29         x1, y1 = points[k]; x2, y2 = points[k+1]
30         A += x1*y2 - x2*y1
31     return A/2.0
32
33 # etats de Gray |00>,|01>,|11>,|10> -> points (b0,b1) du plan de phase
34 gray = {0: (0, 0), 1: (1, 0), 2: (1, 1), 3: (0, 1)}
35 orbite_g = [gray[j] for j in (0, 1, 2, 3, 0)] # sens trigonometrique (RDHL)
36 orbite_g3 = [gray[j] for j in (0, 3, 2, 1, 0)] # sens horaire (RLHD)
37
38 for nom, boucle in [("orbite g (RDHL)", orbite_g),
39                    ("orbite g^3 (RLHD)", orbite_g3)]:
40     ph, scal = phase_boucle(boucle)
41     print(f"{nom}: aire = {aire(boucle):+.0f}, "
42           f"produit = phase*I ({scal}), "
43           f"gamma = {ph/pi:+.3f} pi -> e^(i gamma) = {np.exp(1j*ph):+.3f}")

```

```

orbite g (RDHL): aire = +1, produit = phase*I (True), gamma = +0.500 pi -> e^(i gamma) = +0.000+1.000j
orbite g^3 (RLHD): aire = -1, produit = phase*I (True), gamma = -0.500 pi -> e^(i gamma) = +0.000-1.000j

```

Remarque 27 (Invariance de jauge et convention de signe). *La phase ne dépend pas de représentation choisie : on vérifie qu'elle coïncide avec l'invariant de Bargmann gauge-invariant $\gamma = -\arg \text{Tr}(P_0 P_1 P_2 P_3)$ (où les P_j sont les projecteurs sur les états cohérents déplacés), indépendamment du fiducial étalé. Le signe global de γ dépend de l'orientation conventionnelle de la forme symplectique ; seule importe la donnée invariante : les deux orbites reçoivent des phases **opposées** de module $\pi/2$. L'identité du sens « + » avec notre univers est une convention, inobservable (section 6.5).*

C Le critère C1 : sélection, minimalité, fondement

Première partie : ce que C1 sélectionne

Les seuls objets légitimes à N_{-1} sont les permutations de $\{00, 01, 10, 11\}$. Les six 4-cycles forment trois paires inverses :

C1 : Code de Gray. Score $\gamma(\sigma)$ = nombre de transitions à 1 bit :

C2 : Symétrie axiale de g^2 . Seules (1) et (3) ont g^2 (double NOT : $g^2(b_1b_0) = \overline{b_1}\overline{b_0}$), l'unique involution à symétrie axiale complète. Vérification directe : les orbites (2),(6) donnent $g^2(00) = 10 \neq 11$; (4),(5) donnent $g^2(00) = 01 \neq 11$.

C3 : Profil de points fixes (0,0,0,4). Pour (1) et (3) : g^2 sans point fixe ; $g^3 = g^{-1}$ sans point fixe ; $g^4 = e$ avec 4 points fixes. C3 est une conséquence algébrique de C2, elle-même conséquence de C1.

Proposition 14 (Sélection combinatoire à N_{-1}).

$$\sigma \text{ satisfait } C1 \iff \sigma \text{ satisfait } C1, C2, C3 \iff \sigma \in \{(1), (3)\} \quad (118)$$

Preuve : C1 élimine déjà (2),(4),(5),(6) et ne laisse que $\{(1), (3)\}$ (table 13), car sur $\{0,1\}^2$ les seuls 4-cycles à transition unitaire sont les deux parcours du carré de Hamming. Pour ces deux orbites, C2 (g^2 axial) et C3 (profil (0,0,0,4)) sont alors automatiquement satisfaits : ce sont des conséquences de C1, non des restrictions additionnelles. (3) = (1) $^{-1}$: RDHL et RLHD.

La Proposition 14 est une démonstration complète à N_{-1} , sans espace de Hilbert, énergie, ni fidélité quantique. Elle établit que RDHL n'est pas arbitraire parmi 24. En revanche, les orbites (1) et (3) sont algébriquement indiscernables à N_{-1} : l'automorphisme $\phi(x) = \overline{x}$ les conjugue, et aucun critère purement combinatoire ne peut les distinguer (théorème d'indistinguabilité, §5.7).

Seconde partie : pourquoi C1 n'est pas arbitraire

P.1 Unicité de la paire d'orbites

Proposition 15 (Unicité de la paire d'orbites à ordre 4 et score de Gray 4). Dans $\mathbb{Z}_4$ sur $\{0,1\}^2$, $\{g^1, g^3\}$ est l'unique paire d'éléments d'ordre 4 formant une orbite unique de longueur 4 avec score de Gray maximal. *Preuve : les éléments d'ordre 4 sont exactement g^1 et g^3 ; g^2 a ordre 2, g^4 ordre 1. La propriété de Gray est vérifiée explicitement pour (1) et (3). $\square$*

Vérification, script `verif_Nm1.py`, bloc B. Énumération des six 4-cycles de $\{0,1\}^2$: deux atteignent l'action minimale 4, et ils sont images miroir l'un de l'autre. $\square$

Ce résultat montre que l'ordre 4 + Gray (essentiellement C1) suffit déjà à sélectionner la paire ; C2 et C3 sont des confirmations. La question résiduelle : l'ordre 4 + Gray est-il le plus minimal ensemble canonique ?

P.2 Le score de Gray comme moindre action

Le résultat suivant répond partiellement à la question résiduelle de P.1 : le score de Gray n'est pas une propriété adjointe au critère, mais l'unique extremum d'une action interne au substrat.

Proposition 16 (Moindre action de Hamming). Parmi les six 4-cycles hamiltoniens sur $\{0,1\}^2$ (arrangements cycliques visitant les quatre états et se refermant), la paire de Gray {RDHL, RLHD} est l'unique cycle minimisant l'action de Hamming

$$\mathcal{A}(c) = \sum_{i=1}^4 d_H(x_i, x_{i+1}), \quad x_5 \equiv x_1.$$

Son action vaut $\mathcal{A} = 4$; tout autre 4-cycle hamiltonien vérifie $\mathcal{A} \geq 6$. Preuve : un 4-cycle hamiltonien comporte exactement quatre pas, et $d_H(x, y) \geq 1$ pour $x \neq y$; donc $\mathcal{A}(c) \geq 4$, avec égalité si et seulement si chaque pas vérifie $d_H = 1$. Sur $\{0,1\}^2$, $d_H = 1$ équivaut à une différence d'un seul bit (arête du graphe de Hamming Q_2) ; les seules paires à $d_H = 2$ sont $\{00, 11\}$ et $\{01, 10\}$. Le graphe Q_2 est biparti selon la parité $b_1 \oplus b_0$: états pairs $\{00, 11\}$, impairs $\{01, 10\}$. Un cycle hamiltonien visite deux états pairs et deux impairs ; pour que tous les pas vérifient $d_H = 1$ (et changent donc la parité), la suite des parités doit alterner P, I, P, I, ce qui n'est réalisé, à rotation et réflexion près, que par le cycle 00–01–11–10, l'orbite de Gray, parcourue dans ses deux sens (RDHL et RLHD). Tout autre arrangement de parités contient un motif P, P ou I, I, donc au moins un pas à $d_H = 2$, d'où $\mathcal{A} \geq 6$. $\square$

Vérification, script `verif_Nm1.py`, bloc B. Les deux cycles optimaux ont tous leurs pas à distance de Hamming 1 : ce sont les codes de Gray. Les quatre autres ont une action de 6. $\square$

Portée. C1 n'est donc pas un critère *adjoint* mais l'unique minimiseur d'une action définie par la seule métrique de Hamming, intrinsèque au produit de bits, sans structure externe. La preuve établit au passage l'équivalence de C1 avec trois propriétés indépendantes : *atomicité* (chaque pas est un unique basculement de bit), *adjacence* (le cycle n'emprunte que des arêtes de Q_2) et *alternance de parité*. La canonicité résiduelle se réduit ainsi à admettre un **principe de moindre action**, établi ici par énumération finie, et non importé du principe de minimisation global du modèle, ce qui serait circulaire. Reste alors la seule question vraiment primitive (traitée en P.3) : *pourquoi* le substrat extrêmise-t-il son action ; la réponse la plus économique est que le respect de la structure de produit (P.1, critère 1) *est* cette extrémisation, l'action minimale coïncidant avec l'atomicité de la distinction.

P.3 Fondement logique de l'action minimale

On peut aller plus loin et montrer que l'« action minimale » n'est pas un *optimum* que le substrat sélectionnerait, mais l'*absence d'alternative*, argument entièrement logique, sans recours à l'énergie des niveaux supérieurs. Il repose sur deux engagements constitutifs de N_{-1} : **(a) atomicité**, le bit est l'unité indécomposable de distinction, et un acte primitif est un et un seul bit ; **(b) raison suffisante** (le substrat ne porte aucune distinction sans fondement, renforcée par **(b') pré-temporalité**) nulle relation de simultanéité n'existe avant l'émergence du temps (orienté à N_1 ; N_0 n'en porte que l'axe d'ordre).

Proposition 17 (L'action minimale comme unicité, non comme optimum). *Sous les hypothèses (a), (b) et (b'), toute transition du substrat change exactement un bit. En conséquence, parmi les trajectoires fermées visitant les quatre états de $\{0,1\}^2$, seules les orbites de Gray {RDHL, RLHD} sont des orbites primitives ; les quatre cycles « diagonaux » n'en sont pas. L'action de Hamming minimale (proposition 16) n'est donc pas le résultat d'une optimisation : le substrat ne dispose d'aucune orbite primitive d'action supérieure. Preuve : une transition qui porterait deux bascules de bits à la fois devrait, ou bien les lier (poser une corrélation entre deux coordonnées indépendantes (la structure de produit définit deux bits comme indépendants), corrélation sans fondement, exclue par (b)) ou bien les exécuter « en même temps », ce qui invoque une simultanéité, relation temporelle absente à N_{-1} , exclue par (b'). Les deux seules voies étant fermées, une transition ne porte qu'une distinction, soit un bit (a) : donc $d_H = 1$ par pas. Or les paires à $d_H = 2$ ($\{00,11\}$, $\{01,10\}$) ne sont alors pas des pas mais des compositions de deux pas ; un « cycle » qui les emprunte n'est pas une orbite à quatre pas, mais un composite. Parmi les orbites fermées authentiques (quatre pas atomiques) visitant les quatre états, ne subsistent que les orbites de Gray (proposition 16). □*

Remarque 28 (Statut). *Énoncé de portée méthodologique : il précise que la moindre action de Hamming n'est pas un principe d'optimisation mais un critère d'unicité. Son contenu calculatoire est celui de la Prop. 15.*

Inversion de la flèche. L'argument retourne l'intuition usuelle. Ce n'est pas « minimisation du changement $\Rightarrow$ émergence du temps », mais l'inverse :

$$\text{pas de temps} \Rightarrow \text{pas de simultanéité} \Rightarrow \text{distinction sérielle, atomique} \Rightarrow \text{C1.}$$

L'ordre *sériel* forcé des distinctions (succession logique sans métrique) est ce qui, devenu axe d'ordre à N_0 puis orienté à N_1 , *devient* le temps : la sérialité de C1 est la pré-forme du temps.

Projection vers le moindre-action physique. Le principe de moindre action de la physique (action stationnaire, minimum d'énergie) n'est pas la *source* de cet argument mais sa *projection* : quand les pas discrets deviennent un chemin continu aux niveaux supérieurs, l'atomicité logique devient la géodésique / l'action extrême, et le minimum d'énergie en est le visage physique. Il est *hérité*, non importé, au même titre que $\mathcal{D}_0 \rightarrow \Lambda$ (point 4 des points ouverts).

Résidu, assumé. La régression s'arrête ici. L'hypothèse (b) (raison suffisante) est un *principe* logique, non un théorème : on le tient pour constitutif de la rationalité du substrat. Mais c'est la cible légitime ; on a remplacé « pourquoi le substrat minimiserait-il l'énergie ? » (sans réponse interne) par « le substrat ne fait aucune distinction sans fondement, et avant tout temps », une loi de la pensée et non de la physique. En ce sens, la *définition même de la logique (distinction fondée, atomique, pré-temporelle) contient déjà C1.*

D Invariant B.V : développement formel de la non-commutativité

Niveau 1 : Fait algébrique à N_{-1} . $\mathbb{Z}_4$ est abélien : les *éléments* g^k commutent tous. La non-commutativité pertinente porte sur les **opérations primitives** NOT et XOR de $N_{s-1,1}$:

$$\text{NOT}_{b_0} \circ \text{XOR}(b_1, b_0) \neq \text{XOR}(b_1, b_0) \circ \text{NOT}_{b_0} \quad (119)$$

(vérifiable sur $(b_1, b_0) = (0, 1)$, avec $\text{NOT}_{b_0} : b_0 \mapsto \neg b_0$ et $\text{XOR} : b_1 \mapsto b_1 \oplus b_0$: $\text{NOT}_{b_0} \circ \text{XOR}$ donne $(1, 0)$, tandis que $\text{XOR} \circ \text{NOT}_{b_0}$ donne $(0, 0)$: non-commutation).

Formellement :

$$\exists (P_i, P_j) \in \mathcal{P}_{N_{s-1,1}}^2 : P_i \circ P_j \neq P_j \circ P_i \quad (120)$$

C'est un **invariant structural** de N_{-1} : nécessaire à l'universalité du calcul réversible.

Niveau 2 : Projection rigoureuse à N_0 .

Proposition 18 (Préservation de la non-commutativité par $\Phi_{-1 \rightarrow 0}$). *L'enveloppe linéaire des **primitives** (un basculement et les deux opérations conditionnelles, matrices de permutation de $\{0, 1\}^2$) a des commutateurs qui engendrent $\mathfrak{so}(3) \cong \mathfrak{su}(2)$ (article N_0) ; l'algèbre est donc **non-commutative** :*

$$\exists (\hat{P}_i, \hat{P}_j) : [\hat{P}_i, \hat{P}_j] \neq 0 \quad (121)$$

L'image de $\mathbb{Z}_4$ lui-même reste commutative (le groupe est abélien) ; c'est la structure génératrice qui ne l'est pas. La non-commutation des opérateurs de Pauli sur $n \geq 2$ qubits est standard.

Vérification, script `verif_Nm1.py`, bloc E. NOT et XOR ne commutent sur *aucune* des quatre configurations, et ce sont l'une et l'autre des involutions. $\square$

Proposition 19 (Héritage de la non-commutativité). *Pour tout couple d'opérateurs hermitiens non-commutants $(\hat{A}, \hat{B})$ de l'algèbre engendrée :*

$$\Delta_\psi A \cdot \Delta_\psi B \geq \frac{1}{2} |\langle \psi | [\hat{A}, \hat{B}] | \psi \rangle| \quad (122)$$

La relation $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ est un cas particulier dans la limite $\dim \mathcal{H} \rightarrow \infty$; à N_1 , elle prend la forme de la relation de Weyl des quadratures d'un mode. La constante $\hbar$ n'est une propriété ni de $\mathbb{Z}_4$ ni de N_0 : c'est un étalonnage.

Niveau 3 : Analogie structurelle.

$$\underbrace{P_i \circ P_j \neq P_j \circ P_i}_{N_{-1}} \xrightarrow{\Phi_{-1 \rightarrow 0}} \underbrace{[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0}_{N_0} \rightsquigarrow \underbrace{\Delta A \cdot \Delta B \geq c > 0}_{\text{analogie}} \quad (123)$$

E Compléments formels : discernabilité et durabilité

La discernabilité potentielle unifiée

Définition 4 (Graphe pondéré canonique de $\mathcal{M}$). Nœuds : éléments de $\mathcal{M}$. Arêtes : pour chaque $t \in \mathcal{T}$, arête entre A et $t(A)$. Poids :

$$w(A, t(A)) := -\log_2 p(t | A), \quad p(t | A) := \frac{1}{\deg_{\mathcal{T}}(A)} \quad (124)$$

Définition 5 (Discernabilité potentielle unifiée).

$$\mathcal{D}(A, B) := \min_{\gamma: A \rightsquigarrow B} \sum_{k=1}^{\ell(\gamma)} w(\gamma_{k-1}, \gamma_k) \quad (125)$$

$\mathcal{D}(A, A) = 0$; $\mathcal{D}(A, B) = +\infty$ si composantes disjointes.

Proposition 20 (Cas particulier géodésique). Si $\deg_{\mathcal{T}}(A) = d$ constant : $w = \log_2 d$ et $\mathcal{D}(A, B) = \log_2 d \cdot \ell^*$. Pour $d = 2$: $\mathcal{D} = \ell^*$ (distance géodésique simple : le nombre minimal de transformations).

Remarque 29 (Statut). Cas particulier de la définition de $\mathcal{D}$: vérification de cohérence avec une distance connue, non un résultat indépendant.

Proposition 21 (Cas particulier Jaccard). Si l'on munit $\mathcal{M}$ d'une arête directe $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ de poids $w(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \log_2(|\mathcal{A} \cup \mathcal{B}|/|\mathcal{A} \cap \mathcal{B}|)$ (le log-rapport de Jaccard), la discernabilité lue sur cette arête vaut

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \log_2 \left(\frac{|\mathcal{A} \cup \mathcal{B}|}{|\mathcal{A} \cap \mathcal{B}|} \right). \quad (126)$$

Remarque : cette grandeur ne dépend que des extrémités $\mathcal{A}, \mathcal{B}$; elle n'est donc pas la somme télescopique d'un chemin élément par élément (lequel donnerait $\log_2(|\mathcal{A}| |\mathcal{B}| / |\mathcal{A} \cap \mathcal{B}|^2)$), mais le poids assigné directement à la transition $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$.

Remarque 30 (Statut). Cas particulier de la définition de $\mathcal{D}$, comme le précédent.

Proposition 22 ($\mathcal{D}$ est une métrique étendue). Non-négativité, identité des indiscernables, symétrie (par réversibilité de $\mathcal{T}$), inégalité triangulaire (par concaténation de chemins optimaux).

Remarque 31 (Statut). Vérification des axiomes d'une métrique étendue : séparation, symétrie, inégalité triangulaire. Contrôle de bonne définition, non un résultat.

Statut. Ce $\mathcal{D}$ est l'objet **symétrique dérivé** : la symétrie provient de ce que la géodésique prend le minimum sur les deux orientations. La primitive est la longueur *orientée* δ (§3.2) : même lorsque $\mathcal{T}$ est réversible, $\delta(A, B) \neq \delta(B, A)$ en général, et $\mathcal{D}(A, B) = \min(\delta(A, B), \delta(B, A))$ en oublie l'orientation. La « symétrie par réversibilité » ci-dessus est donc une propriété du dérivé, non de la primitive, l'oubli de l'orientation est la projection $N_{-1} \rightarrow N_0$.

La mesure de durabilité

B.1 : Strate I : durabilité combinatoire à N_{-1}

Définition 6 (Durabilité combinatoire). $\sigma_\pi := g^{\pi(4)} \circ \dots \circ g^{\pi(1)}$ sur $\{0, 1\}^2$.

$$\mathcal{D}_{\text{comb}}(\mathcal{L}_\pi) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \# \{k \leq n \mid \sigma_\pi^k(A) = A\} \quad (127)$$

Proposition 23 (Existence, valeur, indépendance). La limite existe pour tout A ; vaut $1/p$ (p = période de σ_π) ; est indépendante de A .

Preuve : σ_π est une bijection de $\{0, 1\}^2$, donc d'ordre fini p . La suite indicatrice $\mathbf{1}[\sigma_\pi^k(A) = A]$ est p -périodique ; sa moyenne de Cesàro converge vers $1/p$. L'indépendance en A suit de la transitivité de $\langle g \rangle$ sur $\{0, 1\}^2$: g étant un 4-cycle, tous les points sont équivalents, donc toutes les orbites de $\sigma_\pi = g^m$ partagent la même longueur.

Calcul. Pour RDHL et RLHD : $1 + 2 + 3 + 4 = 10 \equiv 2 \pmod{4}$, donc $\sigma_\pi = g^2 = D$, d'ordre $p = 2$: $\mathcal{D}_{\text{comb}} = 1/2$ pour les deux.

B.2 : À N_0 : identité opératoire et durabilité conservée

Proposition 24 (Durabilité combinatoire, inchangée à N_0). À N_0 , les opérateurs g^k s'étendent en unitaires sur $\mathbb{C}^4$. La remarque 16 donne $\sigma_{\text{RDHL}} = \sigma_{\text{RLHD}} = g^2$ comme unitaires. Toute fonctionnelle de durabilité ne dépendant que de σ_π coïncide donc pour les deux boucles :

$$\mathcal{D}_{\text{phys}}^{(N_0)}(\text{RDHL}) = \mathcal{D}_{\text{phys}}^{(N_0)}(\text{RLHD}) = \mathcal{D}_{\text{comb}} = \frac{1}{2}. \quad (128)$$

Démonstration. Calcul direct : $\sigma_{\text{RDHL}} = g^{1+2+3+4} = g^{10} = g^2$ et $\sigma_{\text{RLHD}} = g^{1+4+3+2} = g^{10} = g^2$. L'ordre des exposants est sans effet : l'addition dans $\mathbb{Z}_4$ est commutative. $\square$

B.3 : À N_1 : la sélection par l'acte

À N_1 , la sélection d'une des deux racines de $\mathbb{C}$ distingue les deux boucles par le signe de la phase géométrique $\pm i$ de l'orbite de Gray (proposition 8). Elle ne modifie pas leur durabilité, qui reste $\mathcal{D}_{\text{comb}} = \frac{1}{2}$ pour l'une comme pour l'autre : *la sélection est un signe, non un facteur*. La dispersion ondulatoire n'y intervient pas comme habilitateur ; elle est une autre lecture du même acte (section 6). Le signe retenu est une convention : l'article N_1 établit qu'aucune observable ne le lit.

F Architecture hiérarchique des sous-niveaux de N_{-1}

La boucle RDHL primaire se reproduit et s'auto-compose :

$$\mathcal{L}_{\text{RDHL}}^{(k+1)} := \mathcal{L}_{\text{RDHL}} \left[\mathcal{L}_{\text{RDHL}}^{(k)} \right], \quad K(N_{-1,k}) = O(k \cdot n_k \log n_k) \quad (129)$$

$N_{s-1,0}$: **Le Dit**. Unité logique élémentaire : deux possibilités complémentaires depuis rien. Représenté formellement par $\{0,1\}$; l'entité ontologique (Dit) est antérieure au bit.

$N_{s-1,1}$: **Portes 2-bits et opérateurs $\mathbb{Z}_4$** . Deux Dits assemblés : espace $\{00,01,10,11\}$. Primitives : NOT_{b_0} , NOT_{b_1} , et l'échange SWAP des deux Dits, ce dernier composite, décomposable en trois XOR : $b_1 \oplus b_0$, $b_0 \oplus b_1$, $b_1 \oplus b_0$, ce qui le rattache aux primitives NOT/XOR du substrat. Compositions structurées : les quatre g^k de $\mathbb{Z}_4$.

Compositions des g^k (avec $\circ$ appliqué de droite à gauche) : $g^1 = R = \text{NOT}_{b_0} \circ \text{SWAP}$; $g^2 = D = \text{NOT}_{b_0} \circ \text{NOT}_{b_1}$; $g^3 = H = \text{NOT}_{b_1} \circ \text{SWAP}$; $g^4 = L = \text{Id}$. (On vérifie sur les quatre états qu'elles reproduisent exactement (38)–(41).)

$N_{s-1,2}$: **Boucle RDHL**. Premier système auto-organisé. Boucles duales : $\mathcal{L}_{\text{RDHL}} = L \circ H \circ D \circ R$ (complexité) ; $\mathcal{L}_{\text{RLHD}} = \mathcal{L}_{\text{RDHL}}^{-1}$ (entropie). Coût en primitives : $2 + 2 + 2 + 1 = 7$ opérateurs (2 bits), 14 opérations atomiques par cycle : le quantum de construction de N_{-1} .

$N_{s-1,3}$: **Assemblages : émergence de la conditionnalité**. (*Les portes ci-dessous sont des réalisations physiques à N_0 des structures logiques de $N_{s-1,3}$, non des structures de N_{-1} lui-même.*)

- **CNOT** : $|c, t\rangle \mapsto |c, t \oplus c\rangle$, conditionnalité simple, réalisation de R .
- **Toffoli (CCNOT)** : $|c_1, c_2, t\rangle \mapsto |c_1, c_2, t \oplus (c_1 \cdot c_2)\rangle$, double conditionnalité, universel pour le calcul réversible.
- **Fredkin (CSWAP)** : échange conditionnel ; conserve le poids de Hamming, réalisation de D , préfigure la conservation de la charge.

$N_{s-1,3}$ est le premier sous-niveau Turing-complet pour le calcul réversible.

$N_{s-1,4}$: **Cohérence de phase**. (*Réalisations physiques à N_0/N_1 .*)

- CR_k : $|c, t\rangle \mapsto |c, e^{2\pi i/2^k} t\rangle$ si $c = 1$, réalisation de H ; k encode la profondeur hiérarchique.
- $i\text{SWAP}$: $|01\rangle \mapsto i|10\rangle$, $|10\rangle \mapsto i|01\rangle$, réalisation de L ; corrélation de phase irréductible, $(i\text{SWAP})^2 = Z \otimes Z$ (phase de parité, $\text{diag}(1, -1, -1, 1)$).
- **QFT** : $|j\rangle \mapsto \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_k e^{2\pi i j k / 2^n} |k\rangle$, circuit de CR_k ; préfigure la structure spectrale des champs.

$N_{-1,k}$ pour $k \geq 5$: **Vers la saturation**. La largeur croît comme 2^k ; la profondeur super-exponentiellement ; les corrélations tendent vers un réseau dense (préfigure la non-localité quantique) ; la différenciation produit un continuum (préfigure le spectre des champs). Quand $\mathbb{Z}_4$ est exhaustif dans les systèmes $N_{s-1,k}$: $Nf_{-1,4} = Nf_{0,0}$, le Bit émerge.

Le périmètre de N_{-1} : noyau ou plénium ?

Une question doit être tranchée explicitement, faute de quoi l'article paraîtrait osciller entre deux lectures incompatibles du substrat. Lorsqu'on écrit que N_{-1} est le domaine des structures logiques et mathématiques pures (§3.1), désigne-t-on la même chose que le noyau minimal $\mathbb{Z}_4$ construit dans le corps de l'article ? Deux positions sont possibles.

La lecture « plénium ». N_{-1} serait d'emblée le règne entier des vérités logico-mathématiques — un platonisme intégral où tout ce qui est mathématiquement vrai préexiste comme donnée du substrat, l'arithmétique, la topologie, le tiers exclu.

La lecture « noyau et déploiement ». N_{-1} est le seul noyau $\mathbb{Z}_4$ (la distinction, les quatre opérateurs, la boucle), et tout le reste — l'arithmétique, la conditionnalité, l'universalité calculatoire, la cohérence de phase — est engendré par le déploiement interne $N_{s-1,0} \rightarrow N_{s-1,1} \rightarrow \dots$ décrit ci-dessus. Les vérités mathématiques ne sont alors pas présupposées en bloc : elles sont ce que produit la grammaire en se jouant sur ses propres produits.

Le modèle retient la seconde, pour deux raisons. Par *parcimonie* : la lecture plénum suppose donné ce que la lecture générative construit, et n'ajoute aucun pouvoir explicatif. Par *cohérence* avec la thèse centrale : tout procède d'un unique générateur (§3.2), et il serait contradictoire de poser à côté de lui un stock de structures qu'il n'aurait pas engendrées. L'énoncé « N_{-1} contient toutes les structures possibles » doit donc se lire au sens **génératif** — « il a de quoi les engendrer toutes » — et non au sens **extensionnel** — « elles y sont toutes déjà déposées ».

Cette précision n'est pas seulement doctrinale : elle détermine ce que l'article revendique et ce qu'il ne revendique pas. Elle interdit en particulier de tirer du modèle une thèse sur le statut ontologique des objets mathématiques en général, question qui excède son périmètre ; et elle rend falsifiable ce qui, dans la lecture plénum, ne le serait pas, puisqu'il devient légitime de demander *par quel chemin* une structure donnée s'engendre à partir du noyau — ou de constater qu'elle ne s'y engendre pas.

G Prolongement : la hiérarchie des niveaux comme thermodynamique généralisée

Cette annexe excède le périmètre de l'article. Tout ce qui précède portait sur N_{-1} et sur sa transition vers N_0 ; ce qui suit esquisse le cadre dans lequel cette transition n'est qu'un cas particulier. On l'inclut parce que la question se pose inévitablement — si le passage $N_{-1} \rightarrow N_0$ obéit à un mécanisme, ce mécanisme est-il propre à ce passage ou général ? — et parce que la réponse détermine ce que l'article revendique. Son statut est **programmatique** : aucune des propositions ci-dessous n'est démontrée dans le présent travail, et plusieurs relèvent des articles consacrés aux niveaux supérieurs.

E.1 Trois primitives et la structure d'un niveau

Trois notions suffisent, et ne se définissent pas à partir d'autre chose. La **distinction**, acte de séparer $\mathcal{A}$ de $\overline{\mathcal{A}}$, au sens de Spencer-Brown. La **frontière informationnelle**, mesure de ce qui sépare deux ensembles, dont la forme canonique est celle déjà employée au chapitre 3.2. La **transformation**, opération faisant passer d'un état à un autre. Tout le reste s'en déduit.

Chaque niveau se présente alors comme un quintuplet

$$N_n := (\mathcal{M}_n, \mathcal{O}_n, \mathcal{T}_n, \mathcal{I}^{(n)}, \mathcal{P}_n), \quad (130)$$

où $\mathcal{M}_n$ est l'espace des états, $\mathcal{O}_n$ les observables, $\mathcal{T}_n$ le groupe des transformations, $\mathcal{I}^{(n)}$ la frontière informationnelle et $\mathcal{P}_n$ les propriétés émergentes propres. On reconnaît en N_{-1} le cas dégénéré de cette structure : les observables y sont vides et $\mathcal{I}^{(-1)}$ n'est pas de l'information mais de la discernabilité potentielle, ce qui est exactement le contenu de la définition (13).

La condition d'émergence s'écrit alors sans détour :

$$\exists P \in \mathcal{P}_{n+1} : P \notin \mathcal{P}_n. \quad (131)$$

E.2 L'opérateur de transition

Le passage d'un niveau au suivant est opéré par $\Phi_{n \rightarrow n+1} : N_n \rightarrow N_{n+1}$, doté de trois propriétés :

$$(i) \text{ Injection : } \mathcal{M}_n \hookrightarrow \mathcal{M}_{n+1}, \quad (132)$$

$$(ii) \text{ Émergence : } \mathcal{P}_{n+1} \supsetneq \mathcal{P}_n, \quad (133)$$

$$(iii) \text{ Transformation entropique : } S^{(n+1)} = \Phi_{n \rightarrow n+1}[S^{(n)}]. \quad (134)$$

La troisième est la seule qui ne soit pas une simple mise en forme. Elle affirme que la grandeur entropique ne se conserve pas d'un niveau à l'autre mais *change de nature*, et que ce changement est réglé. Le cas $n = -1$ y est singulier, puisque $S^{(-1)}$ n'est pas définie : c'est le potentiel Π (§8.3) qui joue ce rôle, et $\Phi_{-1 \rightarrow 0}$ est précisément l'opération qui le consomme en produisant $S^{(0)}$.

E.3 Les corollaires de la conjecture

La conjecture 3, énoncée au bilan critique (§8.8.3), affirme l'existence d'une telle suite de niveaux et d'opérateurs, soumise à trois propriétés : conservation (T1), le niveau inférieur s'injectant dans le supérieur sans être détruit ; émergence stricte (T2), le niveau $n + 1$ possédant des propriétés non réductibles à celles du niveau n ; et isomorphisme structural (T3), les lois de $S^{(n+1)}$ étant isomorphes à celles de $S^{(n)}$ au changement de nature de la grandeur près. On en développe ici les cinq conséquences, dont le statut varie considérablement et doit être distingué.

C1 — La thermodynamique comme patron. Si (T3) vaut, la thermodynamique n'est pas un chapitre de la physique mais la grammaire de toute hiérarchie émergente : chaque niveau possède son équilibre (loi 0), sa conservation (loi 1), son second principe (loi 2) et son zéro inaccessible (loi 3). C'est l'énoncé le plus fort et le plus vérifiable de l'ensemble, puisqu'il suffirait d'un niveau sans l'une des quatre lois pour le mettre en défaut.

C2 — Une relation holographique généralisée. On écrirait $N_n \equiv \partial N_{n+1}$: chaque niveau serait la frontière du suivant, et la correspondance AdS/CFT un cas particulier d'une chaîne $N_{-1} \equiv \partial N_0 \equiv \partial^2 N_1 \equiv \dots$. Cette conséquence est la plus spéculative des cinq et doit être tenue pour telle : elle transporte hors de son domaine un résultat établi dans un cadre précis, et rien dans le présent article ne l'appuie. Elle est mentionnée pour être discutée, non pour être utilisée.

C3 — Irréductibilité formelle. $S^{(n+1)}$ n'est fonction continue d'aucune $S^{(n)}$: la discontinuité est de nature, non de valeur. C'est la définition formelle de l'émergence forte, et c'est ce qui distingue la hiérarchie d'une réduction physicaliste. Cette conséquence s'accorde exactement avec le remplissage discret établi au chapitre 8.

C4 — Une flèche du temps par niveau. Chaque niveau introduirait sa flèche propre : aucune à N_{-1} , où la symétrie est totale ; aucune non plus à N_0 , qui porte un axe d'ordre sans orientation (verrou de l'article N_0) ; thermodynamique à N_1 ; géométrique à N_2 ; évolutive à N_3 ; sémantique à N_4 . Ces flèches seraient cohérentes entre elles sans être réductibles les unes aux autres. Les deux premiers termes de cette liste ne sont pas une clause de style : le premier est le résultat central de l'article, et le second celui de l'article N_0 (théorème 5), et il contraint toute la suite, puisqu'une flèche apparaissant avant N_1 ruinerait l'ensemble.

C5 — Spécialisation de la frontière. La frontière informationnelle garderait la même forme à tous les niveaux, seule sa nature changeant : structure potentielle à N_{-1} , distinction opérationnelle à N_0 , coût énergétique à N_1 , horizon à N_2 , partition soi/non-soi à N_3 , partition signifiant/non-signifiant à N_4 . C'est l'invariant structural de la hiérarchie, et c'est ce que le programme entend par « la même fonction à tous les niveaux ».

E.4 L'isomorphisme des quatre lois

Soit $S^{(n)}$ la grandeur entropique propre au niveau n et $\tau^{(n)}$ la grandeur intensive associée, analogue d'une température, définie par

$$\frac{1}{\tau^{(n)}} = \frac{\partial S^{(n)}}{\partial \mathcal{E}^{(n)}}, \quad (135)$$

où $\mathcal{E}^{(n)}$ est la grandeur extensive du niveau. Les quatre lois se transposent alors terme à terme.

Deux conséquences immédiates méritent d'être relevées, moins pour ce qu'elles apportent que pour ce qu'elles interdisent.

Rendement de Carnot généralisé. Le rendement maximal d'un processus opérant entre deux réservoirs d'un même niveau s'écrit

$$\eta_{\text{Carnot}}^{(n)} = 1 - \frac{\tau_{\text{bas}}^{(n)}}{\tau_{\text{haut}}^{(n)}} < 1. \quad (136)$$

À N_1 on retrouve la limite classique ; à N_2 elle bornerait l'extraction d'information depuis un horizon ; à N_3 , le rendement d'une structure dissipative ; à N_4 , celui d'un acte de communication. La lecture est austère et vaut d'être énoncée : la communication parfaite serait aussi impossible que le mouvement perpétuel, et pour la même raison formelle.

Landauer généralisé. Le principe de Landauer devient un cas particulier d'une relation valable à chaque transition :

$$\Phi_{n \rightarrow n+1} : \Delta \mathcal{E}^{(n+1)} \geq \tau^{(n)} \cdot S^{(n)} \cdot \ln 2. \quad (137)$$

Actualiser une distinction du niveau n dans le niveau $n+1$ a un coût, exprimé dans la grandeur du niveau supérieur. La transition $N_0 \rightarrow N_1$ redonne $k_B T \ln 2$; $N_1 \rightarrow N_2$ dirait que l'énergie se condense en masse ; $N_2 \rightarrow N_3$, que la forme coûte de l'organisation ; $N_3 \rightarrow N_4$, que le sens coûte de la complexité.

Le cas $\Phi_{-1 \rightarrow 0}$ est différent, et c'est important

La relation (137) ne s'applique pas telle quelle à la première transition, et il serait fâcheux de le laisser croire. À N_{-1} il n'y a ni $\tau^{(-1)}$ ni $S^{(-1)}$: le membre de droite n'est pas défini. C'est exactement le point établi au chapitre 3.1 : Landauer ne fonde pas la réversibilité du substrat, il marque le seuil à partir duquel perdre une distinction commence à coûter. La première transition est donc la seule à ne pas avoir de coût énergétique, pour la raison structurelle que l'énergie n'y existe pas encore ; ce que la transition y engage est Π , dont l'emploi ultérieur sera une actualisation et non une dépense. Loin d'être une exception gênante, ce point est la raison pour laquelle N_{-1} est le niveau fondateur : il est le seul dont la sortie soit gratuite.

E.5 Ce que ce prolongement suppose

Il faut être clair sur ce qui est ici emprunté. La conjecture 3 suppose que chaque niveau possède une grandeur entropique propre et une intensive associée ; que ces grandeurs sont reliées par un opérateur unique de forme constante ; et que la structure des quatre lois se transporte sans reste. Aucune de ces trois hypothèses n'est établie ici. La première est plausible pour N_0 à N_2 , où les grandeurs existent, discutable pour N_3 et franchement programmatique pour N_4 , où la « température sémantique » Σ n'a pour l'instant que le statut d'un nom.

Ce que le présent article apporte à ce cadre est plus modeste et plus sûr : il en établit le premier maillon. Que N_{-1} n'ait pas d'entropie mais un potentiel, que sa transition soit discrète, qu'elle ne coûte rien et qu'elle ne sélectionne aucune orientation — voilà quatre points démontrés ou argumentés dans le corps du texte, et sur lesquels le reste de la hiérarchie devra se régler. Si le cadre général est faux, le premier maillon peut rester vrai ; si le premier maillon est faux, le cadre général tombe avec lui.

H Formalisation du capital $\mathcal{C}_x$ et de la condition de saturation, niveau par niveau

Statut de cette annexe

Les sections R.1 et R.2 sont des développements formels : le premier se calcule intégralement sur $\{0,1\}^2$, le second sur le décompte dimensionnel de N_0 . La section R.3 est explicitement qualitative et attend les articles correspondants. La section R.4, enfin, argumente que la correspondance entre chaque opérateur et le capital du niveau qu'il ouvre n'est pas arbitraire mais contrainte par l'algèbre ; il faut lire cet argument pour ce qu'il est, une *contrainte de structure* qui restreint les correspondances admissibles, et non une dérivation. Le point 3 des questions ouvertes du bilan critique reste entier : les rapprochements avec les interactions du Modèle Standard demeurent heuristiques.

Cette annexe développe la condition unique (2) pour les deux niveaux où la formalisation est rigoureuse : N_{-1} (capital de discernabilité) et N_0 (capital d'information). Pour les niveaux N_1 à N_4 , une formulation qualitative est donnée en attendant les articles correspondants.

R.1 N_{-1} : capital de discernabilité $\mathcal{V}$

À N_{-1} , le capital est la discernabilité potentielle $\mathcal{D}$ définie à la section 3.2. Ce qu'une composante g^k en *actualise* à chaque application se mesure par la variation combinatoire $\mathcal{V}$ déjà introduite dans le corps de l'article (tableau 9, profil $(1,2,1,0)$) — grandeur distincte de $\mathcal{D}$, dont elle est le déplacement imprimé sur Ω :

$$\mathcal{V}(g^k) := \frac{1}{|\{0,1\}^2|} \sum_{x \in \{0,1\}^2} d_H(x, g^k(x)) \quad (138)$$

où d_H est la distance de Hamming. Les valeurs sont :

	$g^1 (Nf_{-1.1})$	$g^2 (Nf_{-1.2})$	$g^3 (Nf_{-1.3})$	$g^4 (Nf_{-1.4})$
$\mathcal{V}(g^k)$	1	2	1	0
$\mathcal{V}^{\text{sat}}(k)$	1	2	1	0

La réaction en chaîne suit la discernabilité :

- g^1 sature à $\mathcal{V} = 1$: un bit change, c'est le minimum non nul. g^2 s'instancie.
- g^2 sature à $\mathcal{V} = 2$: deux bits changent, c'est le maximum sur $\{0,1\}^2$. g^3 s'instancie.
- g^3 sature à $\mathcal{V} = 1$: retour au minimum (sens inverse). g^4 s'instancie.
- g^4 sature à $\mathcal{V} = 0$: flux nul, $\mathbb{Z}_4$ épuisé. $Nf_{0.0}$ s'ouvre.

La séquence $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ n'est pas arbitraire : c'est l'unique séquence de variations engendrée par $\mathbb{Z}_4$ sur $\{0,1\}^2$. Elle satisfait la condition $\mathcal{V}(g^4) = 0$, ce qui est exactement $\mathcal{V}^{\text{sat}}(4)$ — l'identité a une discernabilité nulle, preuve que le cycle est accompli.

R.2 N_0 : capital d'information $\mathcal{I}$

À N_0 , le capital est l'information géométrique au sens de Shannon : $\mathcal{I}(Nf_{0.k}) = \log_2 \Omega_k$, où Ω_k est le nombre d'états accessibles à la k -ième dimension.

- $Nf_{0.0}$ (le nœud) : dans l'article N_0 , le grain porte déjà un bit (son espace d'entrelaceurs est de dimension deux) ; le décompte $\Omega_0 = 1$, $\mathcal{I} = 0$ ne vaut que pour un lieu sans grain.
- $Nf_{0.1}$ (ligne, n points) : $\Omega_1 = n$; $\mathcal{I} = \log_2 n$. Sature quand $n \rightarrow \infty$: la ligne ne peut plus s'étirer — la surface devient nécessaire.
- $Nf_{0.2}$ (surface, n^2 points) : $\mathcal{I} = 2 \log_2 n$. Sature : le volume devient nécessaire.
- $Nf_{0.3}$ (volume, n^3 points) : $\mathcal{I} = 3 \log_2 n$. Sature : le temps devient nécessaire.
- $Nf_{0.4}$ (espace-temps, n^4 points) : $\mathcal{I} = 4 \log_2 n$. Sature : $Nf_{0.4} = Nf_{1.0}$, l'onde émerge.

La saturation à chaque dimension correspond à la limite où l'information géométrique d'une dimension ne peut plus être encodée sans passer à la dimension supérieure — c'est le principe de Bekenstein-Hawking pour l'entropie des surfaces ($S \propto A$, surface : saturation de $Nf_{0.2}$) généralisé à chaque dimension.

R.3 N_1 à N_4 : formulations qualitatives

Pour les niveaux supérieurs, la formalisation précise de $\mathcal{C}_x^{\text{sat}}(k)$ appartient aux articles correspondants. Les capitaux et saturations sont :

Niveau	Capital $\mathcal{C}_x$	Sature quand	Ce qui émerge
N_1	Énergie E	$E(Nf_{1.4}) = E_{\text{faible}}$	Particule
N_2	Masse m	$m(Nf_{2.4}) = m_{\text{atom}}$	Molécule
N_3	Forme $\mathcal{F}$	$\mathcal{F}(Nf_{3.4})$ stable	Organisme
N_4	Sens $\mathcal{S}$	$\mathcal{S}(Nf_{4.4})$ institué	?

R.4 Justification algébrique de la thèse : le capital porte les propriétés de $Nf_x.1$

La thèse 2.5 n'est pas une analogie — elle est fondée sur les propriétés algébriques distinctives de chaque opérateur de $\mathbb{Z}_4$.

$R = g^1$ et l'onde/énergie.

g^1 possède trois propriétés algébriques :

1. **Générateur** : g^1 engendre tout le groupe ($g^2 = (g^1)^2$, $g^3 = (g^1)^3$, $g^4 = (g^1)^4 = e$).
2. **Aucun point fixe** : $g^1(x) \neq x$ pour tout $x \in \{0, 1\}^2$.
3. **Orbite de période 4** : $(g^1)^4 = e$, c'est-à-dire une progression cyclique.

L'onde possède exactement ces trois propriétés dans son registre : (1) elle est la forme la plus fondamentale d'énergie, dont toutes les autres dérivent ; (2) elle ne reste jamais stationnaire (aucun point fixe) ; (3) elle est périodique (période $T = 1/\nu$).

$D = g^2$ et la particule/masse.

g^2 possède une propriété algébrique distinctive : l'**involutivité** ($g^2 \circ g^2 = e$). Deux applications ramènent au point de départ — c'est la signature algébrique de la **localisation** : ce qui revient à son origine est localisé. La masse est la propriété la plus invariante des particules ; la dualité onde-corpuscule est la tension g^1 (propagation sans retour immédiat) / g^2 (retour en deux étapes).

$H = g^3 = (g^1)^{-1}$ et la forme/topologie.

g^3 est l'**inverse** de g^1 : là où g^1 propage vers l'extérieur, g^3 intègre vers l'intérieur. La forme topologique est définie par ses **relations internes** (invariants topologiques : connexité, genre, orientation) — exactement le flux rentrant de H . La morphogenèse est un processus d'intégration : l'information de forme vient de l'intérieur du système qui se développe.

$L = g^4 = e$ et le symbole/liens social.

g^4 est l'**identité** : chaque élément reste lui-même, coprésence sans déplacement. Le symbole est une relation de **coprésence** : le signifiant et le signifié coexistent sans se fusionner ; l'institution maintient sa norme sans se déplacer physiquement. De plus, $g^4 = g^1 \circ g^2 \circ g^3$: la Liaison est le *résultat* des trois opérations précédentes — de même, le sens institutionnel présuppose la propagation (communication), la localisation (individu) et la forme (organisme).

La **correspondance** n'est donc pas postulée — elle est *contrainte* par la structure de $\mathbb{Z}_4$ et par la nature du capital émergent à chaque niveau. C'est ce que la thèse 2.5 affirme ; sa démonstration formelle complète requiert les articles sur N_1 à N_4 . On notera que la contrainte joue dans un sens et un seul : elle *exclut* des appariements, elle n'en *impose* aucun. Rien dans $\mathbb{Z}_4$ ne dit que l'involution doit se lire comme masse plutôt que comme toute autre grandeur localisante ; ce que l'algèbre interdit, c'est de lire l'involution comme une grandeur propagative.

I La Rupture comme perturbation fondatrice : le mécanisme des passages supérieurs

Cette annexe démontre formellement que la Rupture $Nf_{x.4} = Nf_{x+1.0}$ est une inhomogénéité dans le milieu du niveau Nx , et que cette inhomogénéité produit nécessairement le capital C_{x+1} du niveau supérieur. Deux cas sont traités : le passage $N_0 \rightarrow N_1$ et le passage $N_1 \rightarrow N_2$.

S.1 Lemme fondamental : discontinuité et propagation

Lemme 6 (Inhomogénéité et perturbation). *Soit un milieu discret couplé : un ensemble de nœuds i avec un capital ϕ_i et des couplages J_{ij} entre voisins. Si le milieu présente une discontinuité — c'est-à-dire une inhomogénéité locale $\delta\phi_i \neq 0$ pour un sous-ensemble de nœuds — alors l'évolution du système est gouvernée par :*

$$\ddot{\phi}_i = \sum_j J_{ij}(\delta\phi_j - \delta\phi_i) \quad (139)$$

Dans la limite de réseau dense ($n \rightarrow \infty$), cette équation devient l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \phi \quad \text{avec} \quad c^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 J \quad (140)$$

Ce lemme est un résultat standard de la limite hydrodynamique des systèmes sur réseau [40]. La Rupture $Nf_{x.4}$ fournit $\delta\phi_i$ — la perturbation infinitésimale due à la discontinuité de frontière. Elle est infinitésimale parce que $\mathcal{D}(g^4) = 0$: la Liaison a discernabilité nulle, donc la discontinuité est minimale, ce qui justifie la linéarisation.

S.2 Passage $N_0 \rightarrow N_1$: la Rupture produit l'onde

Structure de N_0 . Le niveau N_0 accompli est un réseau de grains de valence quatre (les nœuds d'un réseau de spins à pattes de spin $\frac{1}{2}$), posés sur la triangulation de Delaunay du réseau cubique centré. L'aire est portée par les arêtes (la face qu'une patte perce), le volume par les nœuds. Un seul couplage J , la force du lien entre grains, gouverne le réseau. Ce niveau n'a ni dynamique ni signature fixée.

La Rupture $Nf_{0.4} = Nf_{1.0}$, et ce que N_1 en fait. La Liaison $Nf_{0.4}$ referme le niveau. L'article N_1 ne tire pas l'onde d'une perturbation de métrique. Il la tire du choix de $\pm i$, qui rend possible un générateur temporel non nul, et de l'opérateur de lien que porte le produit fibré. Les modes sont de masse nulle et se propagent à $c = \sqrt{2/3} \ell / \delta\tau$ (ℓ la distance entre grains voisins), valeur établie sur l'arène de disphénoïdes. La signature lorentzienne, le cône et les boosts viennent du même choix, avec la réalité des configurations. Lire cette onde comme une perturbation $h_{\mu\nu}$ d'une métrique, et sa rétroaction comme l'équation d'Einstein, reste une hypothèse de structure du programme.

S.3 Passage $N_1 \rightarrow N_2$: la Rupture produit la particule

Structure de N_1 . Le niveau N_1 accompli : un espace-temps peuplé de champs oscillatoires (ondes) avec quatre interactions découplées. Les ondes se propagent librement : $\psi(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$. C'est le milieu constitué par N_1 accompli.

La Rupture $Nf_{1.4} = Nf_{2.0}$. La Liaison $Nf_{1.4}$ (interaction faible, spin, mécanisme de Higgs) referme N_1 . Le mécanisme de Higgs est formellement une brisure spontanée de symétrie : le vide acquiert une valeur moyenne non nulle $\langle \phi \rangle = v \neq 0$. Cette valeur moyenne est précisément l'inhomogénéité :

$$V(x) := \lambda(|\phi|^2 - v^2)^2 \quad (141)$$

C'est un **obstacle** dans le milieu ondulatoire — exactement la perturbation $\delta\phi_i$ du Lemme 6.

Résultat. L'onde ψ en présence du potentiel $V(x)$ satisfait l'équation de Schrödinger avec obstacle :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(x)\psi \quad (142)$$

Les solutions liées de cette équation ($E < 0$) sont des **états localisés** — des paquets d'onde confinés par l'obstacle. C'est la particule : l'onde confinée par la Rupture. La masse m est précisément la mesure du confinement : $m = \lambda v$ (masse des bosons W, Z dans le modèle standard [38]).

Rétroaction. La particule localisée crée à son tour un potentiel $V'(x) \sim m/r$ dans le milieu ondulatoire : elle perturbe les ondes qui l'entourent. C'est l'interaction gravitationnelle et électromagnétique entre particules. Cette rétroaction maintient le déséquilibre de N_2 .

S.4 Généralisation : schéma universel du passage entre niveaux

Les deux passages ci-dessusinstancient le même schéma :

Passage	Milieu de Nx	Rupture ($\delta\phi$)	Capital $\mathcal{C}_{x+1}$	Équation
$N_{-1} \rightarrow N_0$	Réseau logique discret	Discontinuité de $\mathcal{D}$	Information $\mathcal{I}$	Complétion de Cauchy
$N_0 \rightarrow N_1$	Réseau de spin (LQG)	choix de $\pm i$	Énergie E (onde)	modes sans masse, $c = \sqrt{2/3}\ell/\delta\tau$
$N_1 \rightarrow N_2$	Champ ondulatoire	$V(x) = \lambda(\phi ^2 - v^2)^2$	Masse m (particule)	Schrödinger avec V
$N_2 \rightarrow N_3$	Tissu moléculaire	Gradient morphogénétique	Forme $\mathcal{F}$	Équation de réaction-diffusion
$N_3 \rightarrow N_4$	Réseau social	Perturbation symbolique	Sens $\mathcal{S}$	À préciser dans N_4

Pour $N_2 \rightarrow N_3$: le gradient morphogénétique (Turing, 1952 [41]) est précisément l’instabilité de frontière entre tissu différencié et tissu indifférencié — la Rupture moléculaire qui produit les formes biologiques. L’équation de réaction-diffusion est l’analogue de l’équation d’onde à ce niveau.

Remarque 32 (Statut de cette annexe). *Les résultats de S.2 et S.3 sont des résultats établis en physique (relativité générale linéarisée, mécanique quantique avec potentiel, mécanisme de Higgs). Leur interprétation dans le cadre microGlobal — comme instanciations du schéma universel de la Rupture — est une hypothèse de structure du programme, non une dérivation formelle complète. La dérivation complète appartient aux articles sur N_0 , N_1 et N_2 .*

Articulation avec le reste de l’article

Cette annexe et l’annexe G se répondent sans se recouvrir. Celle-là décrit la *comptabilité* des passages, ce qui se conserve, ce qui coûte, ce qui change de nature ; celle-ci en décrit le *mécanisme*, une discontinuité dans un milieu couplé qui se propage et engendre le capital du niveau suivant. L’opérateur $\Phi_{n \rightarrow n+1}$ des équations (132) à (134) reçoit ici son contenu physique : il est l’effet d’une inhomogénéité de frontière. Le cas $N_{-1} \rightarrow N_0$ occupe dans ce tableau une place à part, et pour la raison déjà donnée. La perturbation $\delta\phi$ y est bien définie — c’est la discontinuité de $\mathcal{D}$ à la clôture, dont le lemme 6 exige précisément qu’elle soit infinitésimale, ce que garantit $\mathcal{D}(g^4) = 0$ — mais le milieu n’est pas encore métrique : le passage à la limite qui produit l’équation d’onde n’y a pas de sens, faute d’espace. C’est pourquoi la colonne « équation » y porte une complétion de Cauchy et non une équation de propagation. Ce cas est le seul de la chaîne où la Rupture ne produit pas une onde dans un milieu, mais le milieu lui-même.

J Programme de dérivation formelle de la correspondance RDHL / interactions

La correspondance entre les opérateurs RDHL et les quatre interactions fondamentales est l’une des thèses centrales du programme microGlobal. Cette annexe précise ce que signifierait une dérivation rigoureuse, les étapes nécessaires, et les obstacles actuels.

Q.1 Ce que signifie “dériver” la correspondance

Une dérivation formelle de $R \leftrightarrow$ gravitation (par exemple) devrait établir :

1. Que les invariants de l’opérateur R à N_{-1} (flux sortant, non-involutivité, asymétrie directionnelle) se projettent, via le foncteur $\hat{\mathcal{H}}$, en propriétés de l’espace-temps physique.
2. Que ces propriétés de l’espace-temps correspondent exactement aux propriétés définissant la gravitation (couplage universel à la masse-énergie, connexion gravitationnelle, courbure de Riemann).
3. Que cette correspondance est *unique* : aucun autre opérateur de N_{-1} ne pourrait produire la gravitation.

Les étapes 1 et 3 requièrent la formalisation du foncteur $\hat{\mathcal{H}}$ (objet de l’article sur N_0) ; l’étape 2 requiert la construction du niveau N_1 (champs et ondes).

Q.2 État des correspondances et obstacles

RDHL	Motivation structurelle	Obstacle formel	Niveau requis
$R \leftrightarrow$ Gravitation	Flux sortant universel, couplage à la masse-énergie ; g^1 non involutif : crée une asymétrie directionnelle	La gravitation a le groupe de jauge $GL(4)$ ou $\text{Diff}(M)$; pas de lien direct avec $\mathbb{Z}_4$	N_1, N_2
$D \leftrightarrow$ Force forte	Involution diagonale, conservation du poids de Hamming ; analogue à la conservation de la charge de couleur	<i>Obstacle</i> : $SU(3)$ ne se construit pas depuis g^2 . L'article N_0 place le triplet de couleur sur les cinq états d'un nœud muni d'une patte supplémentaire, que la symétrie S_4 du <i>point</i> (vingt-quatre grains) range en $\mathbf{3} + \mathbf{2}$; les trois appariements du grain y deviennent les trois familles, non la couleur. Le groupe de jauge reste indériverable avant N_2	N_0, N_2
$H \leftrightarrow$ Électromagnétisme	$H = R^{-1}$, flux rentrant ; $U(1)$ est le groupe de l'axe d'orientation engendré par R/H	L'identification $\{R, H\} \leftrightarrow U(1)$ est géométriquement motivée mais non prouvée	N_1
$L \leftrightarrow$ la brisure électrofaible	$L =$ identité, constitutive : elle ne traverse pas la frontière. Le doublet de Higgs et sa valeur dans le vide sont d'hélicité 0 et ne sont jamais échangés	<i>Selon l'article N_1</i> : la partie de jauge du secteur ($W^\pm, Z, \gamma$: hélicité 1, échangés, couplage chirale) est transactionnelle , donc portée par un opérateur <i>im-pair</i> (R ou H), non par L	N_1, N_2

Q.3 Programme de recherche structuré

État du programme

Les deux premières étapes sont en partie réalisées par les articles N_0 et N_1 , et la réalisation ne passe pas par la voie que l'énoncé de l'étape suggère : les groupes viennent du support et de l'acte du niveau, non des ondes ni des opérateurs. Chaque étape indique ce qui est établi.

- Étape 1** — $U(1)$ et $SU(2)$. $U(1)_Y$ ne naît pas des ondes : l'article N_0 impose l'hypercharge (à un facteur près) comme le seul générateur de trace nulle qui commute avec les symétries du triplet et du doublet, sous le postulat des modes ; et $SU(2)_L$ naît à N_1 , parce qu'il **exige une chiralité choisie**, donc de l'acte du niveau et non d'un couplage d'ondes.
- Étape 2** — $SU(3)$ et la violation de parité. $SU(3)$ ne descend pas de g^2 . Les trois appariements d'un nœud 4-valent sont trois *organisations*, qui deviennent les trois familles quand un point les porte, et non un triplet. Le triplet de couleur vient des cinq états d'un nœud muni d'une patte de plus, rangés en $\mathbf{3} + \mathbf{2}$ par la symétrie du point. *La correspondance descend donc du support, et non des opérateurs*, et du point plutôt que du grain. Ce n'est pas la dérivation d'un groupe de jauge, et l'étape 3 ci-dessous dit pourquoi elle ne peut pas l'être avant N_2 .
- Étape 3** — **une impossibilité, et non une difficulté**. L'article N_1 démontre un troisième no-go : *le groupe de jauge est invisible à N_1* . Un groupe de jauge n'est pas déterminé par le nombre de ses porteurs mais par ses constantes de structure, lesquelles n'apparaissent que dans le terme quadratique $A \wedge A$ de la courbure, c'est-à-dire dans l'auto-interaction — que l'unitarité de N_1 interdit. Il ne s'agit donc pas d'une dérivation difficile mais d'une dérivation *impossible* à ce niveau. *L'article N_2 précise l'échéance* : il lève ce no-go à **moitié** — la classification des représentations, oui ; la dynamique et la force, non, tant que

l'évolution reste linéaire. **La classification arrive donc à N_2 , et la non-linéarité à N_3** — où le vertex existe, ce qui lève d'un coup le composite, la liaison, la force et l'identité individuelle. *Mais la dérivation des groupes eux-mêmes n'a pas de domicile annoncé* : N_3 ne la traite pas, et aucun niveau ultérieur ne s'en charge. C'est une question sans échéance.

4. **Étape 4 — Critère de falsifiabilité.** Si une seule des quatre correspondances est falsifiée, le programme devra être révisé. Les deux premières étapes indiquent la forme la plus probable d'une réfutation : non pas qu'un opérateur soit apparié à la mauvaise interaction, mais que *l'appariement lui-même* ne soit pas le bon type de relation — les groupes de jauge naissant du support géométrique plutôt que de l'algèbre des fonctions.

Pourquoi cette annexe figure ici

Le point 3 des questions ouvertes du bilan critique écarte la correspondance entre les quatre opérateurs et les interactions fondamentales, en la qualifiant d'analogie heuristique. Cette annexe ne revient pas sur ce jugement : elle en tire les conséquences méthodologiques. Écarter une thèse et la laisser sans programme sont deux choses différentes ; ce qui précède dit à quelles conditions précises la correspondance cesserait d'être une analogie, quels obstacles s'y opposent aujourd'hui, et à quel niveau chacun devra être levé. C'est aussi, accessoirement, ce qui rend la thèse falsifiable : l'étape 3 de Q.3 énonce explicitement ce qui la ferait tomber.

K Index des notations

Symbole	Signification	Introduit en
Ω	Espace des configurations $\{00, 01, 11, 10\}$	§3.2
g, g^{-1}	Les deux générateurs de $\mathbb{Z}_4$, images miroir l'un de l'autre	§3.7
R, D, H, L	Reproduction, Différenciation, Hiérarchisation, Liaison : les composantes g^1, g^2, g^3, g^4	§1.1.3
σ	Composition nette de la boucle, $L \circ H \circ D \circ R = g^2$	§59
$\delta(A, B)$	Longueur <i>orientée</i> de A vers B : quasi-distance, non symétrique	§8
$\mathcal{D}(A, B)$	Distance symétrique, ombre désorientée de δ ; devient l'information à N_0	§11
$\mathcal{D}$	Discernabilité potentielle, capital de N_{-1}	§3.2
$\mathcal{D}_0$	Discernabilité résiduelle : plancher des boucles non inertes, > 0	§100
$\mathcal{D}_{\text{comb}}$	Durabilité combinatoire, fréquence de retour à l'état initial ; vaut $1/2$	§60
$\mathcal{V}(g^k)$	Variation combinatoire : distance de Hamming moyenne entre un état et son image ; profil $(1, 2, 1, 0)$	tableau 9
$\mathcal{A}(c)$	Action de Hamming d'un cycle ; vaut 4 pour Gray, ≥ 6 sinon	annexe C
$\Pi, \Pi_{\text{ext}}, \Pi_{\text{int}}$	Potentiel logique pur et ses composantes extensive ($R \cdot L$) et intensive ($D \cdot H$)	§8.3
$\mathcal{C}_1, \mathcal{N}_k$	Premier circuit logique ; réseau après k dédoublements, de taille 2^k	§4.5
k^*, λ	Seuil d'auto-référence et paramètre de contrôle de la bifurcation	§8.5
$\mathcal{C}_x$	Capital du niveau x : $\mathcal{D}$ à N_{-1} , $\mathcal{I}$ à N_0 , E à N_1 , m à N_2	annexe H
$\mathcal{I}^{(n)}$	Frontière informationnelle au niveau n	annexe G
$\Phi_{n \rightarrow n+1}$	Opérateur de transition entre niveaux	§132
$Nf_{x.k}$	Instanciation de la k -ième fonction au niveau x ; $Nf_{-1.4} = Nf_{0.0}$	§8
$X, Z, D(a, b)$	Décalage, horloge et déplacement de Weyl ; $ZX = iXZ$	annexe B
γ	Phase géométrique de l'orbite de Gray : $\pm\pi/2$	§6.2

Une précaution de lecture. Trois grandeurs voisines ne doivent pas être confondues, et l'article les distingue partout : δ est *orientée* et sépare les deux boucles ; $\mathcal{D}$ est symétrique et ne le peut pas ; $\mathcal{V}$ ne mesure pas une distance entre configurations mais le déplacement qu'un opérateur imprime sur l'ensemble de l'espace. C'est cette dernière que l'annexe H emploie pour calculer la saturation fonction par fonction.

L Statut épistémique des énoncés

Le tableau qui suit récapitule les énoncés de l'article selon trois régimes : **démontré**, quand une vérification finie ou une démonstration complète est donnée ici ; **conjecturé**, quand l'énoncé est formulé précisément mais renvoyé à un article ultérieur ; **heuristique**, quand il s'agit d'une analogie de structure sans valeur probante. La colonne « dépend de » indique ce qui tombe avec quoi, et la dernière colonne ce qui réfuterait l'énoncé.

Table 20: Statut épistémique des énoncés de l'article : ce qui est démontré, ce qui est conjecturé, ce qui n'est qu'une analogie, avec les dépendances et les critères de réfutation.

Énoncé	Statut	Dépend de	Réfuté par
<i>Le noyau</i>			
Réversibilité du substrat (absence d'extérieur)	démontré	définition du niveau	un mécanisme d'effacement interne
Minimalité de $\{0, 1\}^2$	démontré	exigence d'un groupe d'ordre 4	un espace plus petit adéquat
Sélection de $\{g, g^{-1}\}$ par C1 seul	démontré	énumération finie	un 4-cycle d'action 4 hors classe de Gray
C2 et C3 comme conséquences de C1	démontré	calcul direct	vérification contraire sur les six cycles
C1 comme unique moindre action de Hamming	démontré	partition par la parité $b_1 \oplus b_0$	un cycle d'action < 4 ou $= 4$ non Gray
Minimalité comme unicité, non optimisation	démontré	<i>sous</i> atomicité, raison suffisante	une transition primitive à deux bits
$\sigma = g^2 \neq e$; $\mathcal{D}_{\text{comb}} = 1/2$	démontré	arithmétique de $\mathbb{Z}_4$	calcul contraire
Indiscernabilité par grandeurs symétriques à N_{-1}	démontré	automorphisme de conjugaison	un invariant symétrique séparateur
Identité des compositions nettes ($\sigma = g^2$, dès N_{-1})	démontré	commutativité de $\mathbb{Z}_4$	calcul contraire
Verrou achiral	démontré	$\mathcal{V}(g) = \mathcal{V}(g^3)$	une fonctionnelle achirale séparatrice
Phase géométrique $\pm i$ de l'orbite de Gray	dérivé sous condition (l'enveloppe linéaire, acte de N_0)	relation de Weyl $ZX = iXZ$	une phase autre que $\pm i$
$\text{Sp}(g) = \{1, i, -1, -i\}$	démontré	ordre du cycle	diagonalisation contraire
Observabilité de la phase relative	dérivé sous condition (acte de N_0)	superposition linéaire (N_0)	distributions identiques
Monogamie de l'intrication	démontré	binarité du Dit	un Dit à trois côtés
Cohérence de phase par Dit partagé	dérivé sous condition (acte de N_0)	produit fibré, parité, superposition linéaire (N_0)	un état factorisable à deux secteurs
$\mathcal{D}_0 > 0$	démontré	absence de point fixe de $g^{1,2,3}$	une boucle non inerte de variation nulle
$Nf_{-1.4} = Nf_{0.0}$, remplissage discret	démontré	finitude de $\mathbb{Z}_4$	une cinquième fonction
<i>Le cadre</i>			
Potentiel logique Π et ses trois axiomes	construction	dualité $RL = DH$	un candidat n'empruntant rien à N_0 et mieux fondé
Tripartition de Π en trois entropies	heuristique	$\Pi_{\text{ext}}/\Pi_{\text{int}}$	dérivation contraire à N_0-N_1
Seuil d'auto-référence k^*	conjecturé	expressivité gödelienne, K lue depuis N_0	déploiement n'atteignant pas le seuil
Bifurcation de Landau ; aucune sélection de signe	démontré (forme)	symétrie du potentiel	un terme impair intrinsèque
Sites de proto-information comme noyaux	heuristique	acte d'ouverture de N_0	absence de correspondance de structure
Réalisation comme phase géométrique à N_1	établi à N_1 (cellule $h/4$)	le choix de $\pm i$	phase dépendante de ω
Dispersion comme lecture de l'acte, non ingrédient	établi à N_1 (ordre dominant)	principe $Nf_{x.4} = Nf_{x+1.0}$	un résidu non dérivable dans la reconstruction de ω
Le signe est une convention (inobservable)	établi à N_1	théorème d'inobservabilité de N_1	une observable interne qui lirait le signe
Contrainte de la dimension k (déf. positive)	construction	couplage cellule/grandeur	un capital dual de cellules d'un autre rang
Apaisement dimensionnel ; ordre forcé par le bord	conjecturé	chainage de Stokes	rupture du chainage à un rang
Double rôle des fonctions (registres internes/externes)	conjecturé	indexation commune	coïncidence des deux index sans contenu
Critères de saturation de N_0 à N_4	cadre	principe $Nf_{x.4} = Nf_{x+1.0}$	une transition sans conservation du capital
Isomorphisme trans-niveaux (T1-T3)	conjecturé	existence des grandeurs par niveau	un niveau sans les quatre lois
Relation holographique généralisée (C2)	spéculatif	conjecture ci-dessus	—

Énoncé	Statut	Dépend de	Réfuté par
La Rupture comme perturbation fondatrice	cadre	limite hydrodynamique	un passage sans discontinuité de frontière
Correspondance RDHL / interactions	heuristique	—	falsification d'une seule des quatre
Correspondance RDHL / portes quantiques	heuristique	—	—
Rendement des quatre boucles de minimisation	lecture projetée	grandeurs de N_0-N_1	—

Deux lectures de ce tableau méritent d'être signalées. *Première* : le noyau ne dépend d'aucune ligne de la seconde moitié. Si toutes les conjectures du cadre tombaient, les seize premiers énoncés resteraient vrais. La réciproque est fausse : la chute d'un seul énoncé du noyau, la sélection par C1 ou le verrou achiral en particulier, emporterait le cadre entier. *Seconde* : trois énoncés sont *démontrés sous condition explicite*, et la condition est chaque fois nommée dans la colonne de dépendance — le principe de raison suffisante pour la canonicité de C1, l'acte d'ouverture de N_0 pour l'observabilité de la phase. Ces conditions ne sont pas des faiblesses dissimulées : ce sont les seuls emprunts de l'article, et elles sont au nombre de deux.

M Vérifications calculatoires

Un script indépendant des dérivations du texte (`verif_Nm1.py`) recalcule les résultats de ce niveau. **Bilan : 13 blocs, 42 contrôles, 0 échec.**

Bloc	Objet	Résultat
A	minimalité de $\{0,1\}^2$	fidélité $\rightarrow$ binarité $\rightarrow$ minimalité donne $n = 2 : n = 1$ insuffisant, $n = 3$ non minimal
B	sélection du 4-cycle	six 4-cycles ; action minimale 4 ; exactement deux l'atteignent, images miroir, tous pas à distance 1 : les codes de Gray
C	profil et $\sigma = g^2$	profil $(0,0,0,4)$; σ involution sans point fixe ; $g^4 = e$
D	phase géométrique	les deux orbites enclosent des aires de <i>module</i> 1 et de signes opposés : la phase vaut $\pm i$
E	Invariant B.V	NOT et XOR ne commutent sur <i>aucune</i> des quatre configurations ; toutes deux involutives
F	Invariant B.VI	la parité sépare $\{g^1, g^3\}$ de $\{g^2, g^4\}$; c'est un morphisme $\mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2$
G	durabilité combinatoire	1/2, et identique pour les deux orbites : critère achiral
H	verrou achiral	le spectre est invariant par renversement ; $\langle [A, B] \rangle$ est imaginaire pure et ne devient réelle qu'après choix de i
J	spectre de g	$\text{Sp}(g) = \{1, i, -1, -i\}$; trois valeurs de θ donnent trois distributions distinctes : la phase est observable
K	critère de Hardy	$K = 4 = N^2$ sur le sous-espace chiral : régime quantique
M	superposition ou mélange	pureté 0,5 contre 1 ; le mélange donne la même distribution quelle que soit la phase, la superposition non
L	monogamie	une distinction binaire a deux côtés : trois entités ne peuvent la partager. Quatre des huit ingrédients de l'intrication viennent de N_{-1}
I	cohérence de phase	le degré de cohérence est borné par $\ln 2$; $S = 0$ est atteignable : la cohérence est <i>possible</i> , non obligatoire

Ce décompte n'est pas homogène

Les contrôles se répartissent en quatre types, selon ce qu'ils *établissent* — distinction exposée en détail dans l'article N_3 :

	type	blocs
A	<i>identité</i> — un fait mathématique, sans choix libre	12
B	<i>modèle</i> — établit une direction, jamais une valeur	1
C	<i>tabulation</i> — une cohérence interne, rien de plus	0
D	<i>donnée</i> — exact sur des grandeurs mesurées	0
	total	13

Le test qui classe : perturbez un choix libre — forme, seuil, graine, entrée de table. *Si le résultat change, le contrôle n'établit pas ce qu'il semble établir.*

Ce décompte s'inscrit dans une tendance : la part d'identités décroît de façon monotone d'un niveau au suivant — de 92 % à N_{-1} (douze identités sur treize contrôles) à 37 % à N_3 . **Le programme dérive en bas et contraint en haut**, principe établi et chiffré dans l'article N_3 .

Les douze identités portent la totalité du niveau : sélection du code de Gray, profil de points fixes, aires opposées, non-commutativité, parité, durabilité. *Rien ici ne dépend d'un modèle ni d'un classement.*

References

- [1] Y. Kocher. Essay on a General Theory of Complexity: Foundations of the MicroGlobal Approach. *IPI Letters*, 4(2):O112–O166, 2026. ISSN 2976-730X. <https://doi.org/10.59973/ipil.362>
- [2] Y. Kocher. Émergence de la structure de l'espace-temps à partir d'un substrat logique. Le niveau informationnel du programme microGlobal (troisième volet). Version longue : *Le grain et le vide*, octobre 2026, www.informationphysicsinstitute.org.
- [3] Y. Kocher. Émergence de l'onde, de l'énergie et du temps orienté. Le niveau N_1 du modèle microGlobal. Version longue, 2026.
- [4] J.A. Wheeler. Information, physics, quantum : the search for links. In W.H. Zurek (ed.), *Complexity, Entropy and the Physics of Information*, pp. 3–28. Addison-Wesley, 1990.
- [5] M. Tegmark. *Our Mathematical Universe : My Quest for the Ultimate Nature of Reality*. Knopf, New York, 2014.
- [6] G. Spencer-Brown. *Laws of Form*. Allen & Unwin, London, 1969.
- [7] T. Toffoli. Reversible computing. In J.W. de Bakker, J. van Leeuwen (eds.), *Automata, Languages and Programming*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 85, pp. 632–644. Springer, 1980.
- [8] E. Fredkin, T. Toffoli. Conservative logic. *International Journal of Theoretical Physics*, 21(3–4) :219–253, 1982.
- [9] C.H. Bennett. Logical reversibility of computation. *IBM Journal of Research and Development*, 17(6) :525–532, 1973.
- [10] R. Landauer. Irreversibility and heat generation in the computing process. *IBM Journal of Research and Development*, 5(3) :183–191, 1961.
- [11] C. H. Bennett. The thermodynamics of computation, a review. *International Journal of Theoretical Physics*, 21(12) :905–940, 1982.
- [12] W.H. Zurek. Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical. *Reviews of Modern Physics*, 75(3) :715–775, 2003.
- [13] J.C. Baez, M. Stay. Physics, topology, logic and computation : a Rosetta Stone. In B. Coecke (ed.), *New Structures for Physics*, Lecture Notes in Physics, vol. 813, pp. 95–172. Springer, 2011.
- [14] M.A. Nielsen, I.L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2000.

- [15] R. Penrose. *The Emperor's New Mind : Concerning Computers, Minds, and the Laws of Physics*. Oxford University Press, 1989.
- [16] D. Deutsch. Constructor theory. *Synthese*, 190(18):4331–4359, 2013.
- [17] D. Deutsch and C. Marletto. Constructor theory of information. *Proceedings of the Royal Society A*, 471(2174):20140540, 2015.
- [18] L. Bombelli, J. Lee, D. Meyer, and R. D. Sorkin. Space-time as a causal set. *Physical Review Letters*, 59(5):521–524, 1987.
- [19] S. Wolfram. *A New Kind of Science*. Wolfram Media, 2002.
- [20] A.P. Kirilyuk. Universal science of complexity : consistent understanding of ecological, living and intelligent system dynamics. *Interdisciplinary Description of Complex Systems*, 2014 ; communication invitée, DECOS 2006. HAL : hal-00156368v3.
- [21] C. Rovelli. *Quantum Gravity*. Cambridge University Press, 2004.
- [22] F. Gray. Pulse code communication. *U.S. Patent 2,632,058*, 1953.
- [23] R.W. Hamming. Error detecting and error correcting codes. *Bell System Technical Journal*, 29(2) :147–160, 1950.
- [24] E. Noether. Invariante Variationsprobleme. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, pp. 235–257, 1918.
- [25] S. Kochen, E.P. Specker. The problem of hidden variables in quantum mechanics. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 17(1) :59–87, 1967.
- [26] J.S. Bell. On the Einstein Podolsky Rosen paradox. *Physics*, 1(3) :195–200, 1964.
- [27] J.D. Bekenstein. Black holes and entropy. *Physical Review D*, 7(8) :2333–2346, 1973.
- [28] J. Maldacena. The large N limit of superconformal field theories and supergravity. *International Journal of Theoretical Physics*, 38(4) :1113–1133, 1999. [arXiv:hep-th/9711200, 1997.]
- [29] B.B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. W.H. Freeman, New York, 1982.
- [30] C.G. Langton. Computation at the edge of chaos : phase transitions and emergent computation. *Physica D*, 42(1–3) :12–37, 1990.
- [31] A. Ashtekar. New variables for classical and quantum gravity. *Physical Review Letters*, 57(18) :2244–2247, 1986.
- [32] L. von Bertalanffy. *Théorie générale des systèmes*. Dunod, Paris, 2012.
- [33] D. Durand. *La systémique*. Que Sais-Je ?, PUF, Paris, 2017.
- [34] I. Stengers, I. Prigogine. *La nouvelle alliance, Métamorphose de la science*. Gallimard, Paris, 1986.
- [35] L. Brillouin. *La science et la théorie de l'information*. J. Gabay, Paris, 2000.
- [36] N. Wiener. *La cybernétique : Information et régulation dans le vivant et la machine*. Seuil, Paris, 2014.
- [37] H. Atlan. *Le vivant post-génomique ou Qu'est-ce que l'auto-organisation ?* Odile Jacob, Paris, 2010.
- [38] P.W. Higgs. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. *Physical Review Letters*, 13(16) :508–509, 1964.
- [39] C.W. Misner, K.S. Thorne et J.A. Wheeler. *Gravitation*. W.H. Freeman, San Francisco, 1973.
- [40] H. Spohn. *Large Scale Dynamics of Interacting Particles*. Springer, Berlin, 1991.
- [41] A.M. Turing. The chemical basis of morphogenesis. *Philosophical Transactions of the Royal Society B*, 236(767) :37–72, 1952.

Structure à N_{-1}	Mécanisme de transition	Émerge à N_0	Émerge à N_1	Émerge à N_2
<i>Invariants universels (strate A)</i>				
Bijektivité ; conservation $\mathcal{D}_{\text{tot}}$ (Inv. A.I)	Conservation par réversibilité	Unitarité $\hat{U}^\dagger \hat{U} = \mathbf{1}$	Conservation énergie ; 1 ^{er} principe	:
Clôture du groupe G_k (Inv. A.II)	Permanence des lois logiques	Permanence des lois physiques	:	:
Déséquilibre structurel (σ sans point fixe)	Moteur de complexification	: (pas de dynamique à N_0)	Dynamisme des champs	:
Parité $\mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ (Inv. B.VI)	Préservation sym./asym.	Dichotomie des statistiques : deux classes, par le centre $\{\pm 1\}$ de $SU(2)$ (dérivé sous condition)	Symétrie CPT des champs	:
Non-commutativité NOT/XOR (Inv. B.V)	Algèbre non-commutative	$\mathfrak{su}(2)$ (trois générateurs) ; canal et volume incompatibles	relation de Weyl des quadratures ; phase $\pm i$	:
<i>Structures géométriques</i>				
Ordre partiel $\preceq_H (g^3)$	Densification ($k \rightarrow \infty$)	Forme invariante $aP_1 + bP_3$, de signature indéterminée ; arène plate (prémisse)	signature lorentzienne η , cône	:
Point fixe $\mathcal{A}_k^*$ (attracteur au sens de N_{-1})	Brisure de symétrie spontanée	Vide ordonné (calculé, au-delà de J_c)	:	:
Seuil $\sum_k n_k \geq n_c$	Transition de phase logique	Saturation du site dès le premier tour ; seuil de l'ordre J_c (calculé)	:	:
<i>Opérateurs RDHL $\rightarrow$ interactions (projection sélective)</i>				
$R = g^1$: générateur, flux sortant, sans invariant local	Couplage universel masse-énergie	Ancrage dans $g_{\mu\nu}$	Champ grav. ; courbure Riemann	Graviton (spin 2)
$D = g^2$: involution, $D^2 = L$, poids de Hamming	Polarisation max., jauge Yang-Mills $SU(3)$	Ancrage dans $g_{\mu\nu}$	Champ QCD ; $F_{\mu\nu}^a$; $SU(3)$	Gluons (spin 1) ; quarks
$H = g^3 = R^{-1}$: flux rentrant, dual de R	Couplage sélectif à la charge ; jauge $U(1)$	Ancrage dans $g_{\mu\nu}$	Champ QED ; $F_{\mu\nu}$; $U(1)$	Photon (spin 1) ; électrons
$L = g^4$: identité, coprésence, champ de fond (hyp.)	Statistique quantique ; identité de saveur	Ancrage dans $g_{\mu\nu}$	Champ de fond statistique (hyp.)	$W^\pm, Z^0$; neutrinos ; spin (hyp.)
<i>Invariants de conservation sélectifs (strate B)</i>				
Poids de Hamming w_H conservé par D (Inv. B.I)	Continuisation de l'invariant discret	:	:	Charge électrique $U(1)$
Flux net $q = n_R - n_H$; dualité $H = R^{-1}$ (Inv. B.II)	Conservation flux net orienté	:	Charge conservée Q_e	N_ℓ, N_B
Identité L ; $\Delta N_L = 0$ (Inv. B.III)	Appartenance à frontière conservée	:	Statistique BEF	Pauli ; N_ℓ, N_B

Table 12: Émergences par niveau depuis le substrat logique N_{-1} . Les invariants universels (strate A) émergent dès N_0 ; à N_0 , les quatre fonctions deviennent les quatre pattes d'un grain, lues à travers une face par l'inversion (R se lit H , D se lit D), soit deux axes de flux : c'est ainsi qu'il faut lire « ancrage dans $g_{\mu\nu}$ » dans la colonne N_0 ; leurs champs apparaîtraient à N_1 , leurs quanta à N_2 ; les invariants sélectifs (strate B) ne deviennent effectifs qu'à N_2 . Les correspondances RDHL/interactions sont des préfigurations ; leur dérivation formelle appartient aux articles sur N_1 et N_2 .

#	Orbite	Type de g^2	Paire
(1)	00 → 01 → 11 → 10 → 00	00 ↔ 11, 01 ↔ 10 (axial)	{(1), (3)}
(3)	00 → 10 → 11 → 01 → 00	idem	
(2)	00 → 01 → 10 → 11 → 00	00 ↔ 10, 01 ↔ 11 (diag.)	{(2), (6)}
(6)	00 → 11 → 10 → 01 → 00	idem	
(4)	00 → 10 → 01 → 11 → 00	00 ↔ 01, 10 ↔ 11 (diag.)	{(4), (5)}
(5)	00 → 11 → 01 → 10 → 00	idem	

Table 13: Six 4-cycles sur $\{00, 01, 10, 11\}$, classés par type de g^2 et paire inverse.

#	Orbite	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	γ
(1)	00 → 01 → 11 → 10 → 00	1	1	1	1	4 ✓
(3)	00 → 10 → 11 → 01 → 00	1	1	1	1	4 ✓
(2),(6),(4),(5)		au moins un saut à 2 bits				2 ×

Table 14: C1 élimine les orbites (2),(4),(5),(6).

Propriété	Non-commutativité à N_{-1}	Commutateur quantique
Support	Ensemble fini $\{0, 1\}^2$	Espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$
Constante	Aucune (discret)	$\hbar$ (dimension J.s)
Conséquence	Asymétrie flux R/H	Principe d'incertitude

Table 15: Analogie structurelle : même irréductibilité de l'ordre, formalisations différentes. La première flèche ($\rightarrow$) de la chaîne est une dérivation ; la seconde ($\rightsquigarrow$) est une analogie.

Propriété	Définition unifiée	Cas particulier
Poids	$w = -\log_2 p(t \mid A)$	Uniforme ou ensembliste
Cas géodésique	$\deg = d$ cst, $w = \log_2 d$	$\mathcal{D} = \log_2 d \cdot \ell^*$
Cas Jaccard	$w = \log_2(A \cup t(A) / A \cap t(A))$	$\mathcal{D} = \log_2(\cup / \cap)$
$\mathcal{D} = 0$	$A = B$	Indiscernabilité totale
$\mathcal{D} = +\infty$	composantes disjointes	Discernabilité maximale

Table 16: Synthèse de la définition unifiée. Elle étend $\mathcal{D}$ aux structures non-ensemblistes (groupes, catégories, algèbres).

Entrée		NOT b_0		NOT b_1		SWAP	
b_1	b_0	b'_1	b'_0	b'_1	b'_0	b'_1	b'_0
0	0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1	1

Table 17: Tables de vérité des primitives irréductibles de $Ns_{-1,1}$.

Loi	Formulation générale	Cas N_1	Cas N_4
0	$\tau_A^{(n)} = \tau_B^{(n)}$ à l'équilibre	$T_A = T_B$	$\Sigma_A = \Sigma_B$
1	$d\mathcal{E}^{(n)} = \delta Q^{(n)} - \delta W^{(n)}$	$dU = \delta Q - \delta W$	$d\mathcal{E}_s = \delta Q_s - \delta W_s$
2	$dS^{(n)} \geq 0$	$dS \geq 0$	$d\Sigma \geq 0$
3	$\tau^{(n)} \rightarrow 0$ inaccessible	$T \rightarrow 0$ impossible	$\Sigma \rightarrow 0$ impossible

Table 18: Transposition des quatre lois de la thermodynamique : seule change la nature des grandeurs entropique et intensive.