Émergence de la structure de l'espace-temps à partir d'un substrat logique

Le niveau informationnel du programme microGlobal

Yves Kocher
Information Physics Institute, Gosport, Hampshire, Royaume-Uni
www.informationphysicsinstitute.org

Résumé

Ce travail montre comment le cadre cinématique d'une géométrie quantique découle d'un substrat logique. Deux théorèmes d'impossibilité bornent ce qui ne peut pas découler de cette géométrie. Enfin, l'article met en relation les particules avec leurs caractéristiques quantiques qui émergeront de ces structures. Il ne propose pas une théorie concurrente de la gravité quantique. Il en retrouve le cadre cinématique, mais le groupe, l'espace des états et l'unité du comptage des horizons (un bit par face) y sont obtenus à partir du substrat. La valeur du paramètre d'Immirzi demande un horizon, donc les niveaux suivants.

Le passage exige du substrat cinq conditions, importe deux théorèmes de mathématiques, et pose un acte dont la nécessité est établie (l'enveloppe linéaire des permutations). Sans cet acte, il n'y a pas d'algèbre, donc pas d'espace. Le grain minimal a quatre configurations, réalisées comme deux distinctions binaires, et cette factorisation produit la géométrie. Un basculement et une opération conditionnelle ne commutent pas. Leurs commutateurs engendrent l'algèbre des rotations, où on lit les trois dimensions de l'espace (c'est une interprétation). Le grain a quatre pattes, car quatre est la première valence où l'espace des entrelaceurs porte exactement une distinction binaire.

Les grains pavent l'espace selon la triangulation de Delaunay du réseau cubique centré. Ses tétraèdres sont identiques, et leurs angles se referment exactement autour de chaque arête, donc l'espace est plat. Ce pavage est biparti (deux sous-réseaux). La symétrie complète du tétraèdre appartient au point (les vingt-quatre grains autour d'un sommet), pas au grain.

Les deux impossibilités sont démontrées à partir de prémisses énoncées. D'abord, la signature de l'espace-temps n'est pas dérivable à ce niveau, car trois régions du plan des formes invariantes sont également admissibles. Ensuite, aucune grandeur observable de ce niveau ne peut orienter l'axe d'ordre, donc il n'y a pas de dynamique.

Un seul couplage (la force du lien entre grains) gouverne le réseau. Au-delà d'un seuil, il s'ordonne en un vide, qui choisit l'un des deux appariements courts du grain. Le compromis entre la complexité de ses frontières et sa liberté place le couplage juste au-dessus du seuil. Ces résultats sont calculés par simulation.

Sur ce vide, des structures apparaissent sans réglage. Portés par un point, les trois appariements du grain se lisent comme trois familles. Un nœud muni d'une patte supplémentaire a cinq états, que la symétrie du point range en un triplet et un doublet, lus comme la couleur et l'isospin. Lus comme cinq modes fermioniques (postulat), ces états donnent les seize états d'une génération.

Pour les nombres, le niveau fixe des plages, pas des valeurs. Les dix-huit rapports de masse et angles de mélange calculés tombent dans leur plage, à l'erreur de mesure près (des accords, pas des prédictions). Les hiérarchies de masse observées sont un peu plus raides que la valeur centrale du modèle, et la somme des masses des neutrinos dépasse la borne cosmologique actuelle. Les structures sont une assiette creuse, que rien de petit ne déplace. Les valeurs fines se règlent sur une assiette plate, par les interactions des niveaux suivants. Si tout était fixé dès la base, rien ne pourrait émerger.

Sept structures manquent à ce niveau. Un seul choix nouveau, une racine de moins un au niveau suivant, les lève avec des acquis du niveau. Que ce soit le seul remède reste une conjecture. Chaque énoncé porte son statut, et chaque affirmation est réfutable.

Mots-clés : Fondements de la physique ; Modèles prégéométriques ; Émergence de l'espace ; Géométrie quantique ; Gravité quantique à boucles ; Pavage de disphénoïdes ; Réseau biparti ; Entrelaceurs de réseaux de spins ; Paramètre d'Immirzi ; Théorèmes d'impossibilité ; Familles de fermions.

1 Introduction

Cet article est le troisième volet du programme microGlobal. Le premier volet [1] caractérise tout système auto-organisé par quatre fonctions fondamentales : Reproduction (R), Différenciation (D), Hiérarchisation (H) et Liaison (L). Le volet précédent [2] construit le substrat logique N_{-1}. Il montre que ces quatre fonctions ne sont pas des axiomes descriptifs, mais les composantes du groupe cyclique d'ordre quatre.

Le présent article traite le passage suivant, celui où des distinctions logiques deviennent une géométrie. Il suit trois règles, valables pour toute la série. D'abord, chaque énoncé porte un statut (démontré, calculé, dérivé sous condition, posé ou emprunté, prémisse, accord ou prédiction). Un énoncé ne vaut pas plus que ce que son statut annonce. Un résultat

calculé est obtenu par simulation sur de grands réseaux. Ses critères de décision sont en général écrits avant le calcul, et les exceptions sont signalées. Ensuite, chaque manque est nommé avec son niveau d'accueil (le niveau où il serait traité). Si aucun niveau ne peut l'accueillir, on le dit. Enfin, on préfère un théorème d'impossibilité à une promesse. Un tel théorème est réfutable, et il évite de chercher ce qu'il interdit.

1.1 Le programme microGlobal, en bref

MicroGlobal est un programme de dérivation par niveaux. Chaque niveau est construit à partir du précédent. Il déclare ce qu'il emprunte, ce qu'il pose et ce qu'il doit au niveau suivant. On ne cherche pas une équation fondamentale. On cherche l'ordre dans lequel les structures deviennent possibles (figure 1).

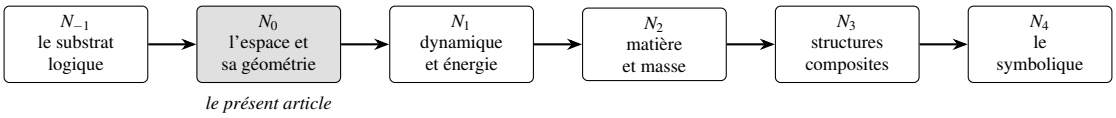


Figure 1: Les six niveaux du programme. Le niveau grisé est celui que traite cet article.

Quatre opérations reviennent à chaque niveau. Ce sont la reproduction (qui répète à l'identique), la différenciation (qui sépare), la hiérarchisation (qui emboîte) et la liaison (qui referme la frontière). Ces opérations jouent deux rôles.

D'abord, elles construisent la structure interne du niveau. Cette structure a quatre échelons successifs (cinq si l'on compte l'objet reçu du niveau inférieur). Chaque échelon porte un système et la fonction qui le produit. D'un échelon au suivant, les systèmes s'agrègent et les fonctions se composent (section 6).

Ensuite, les quatre opérations se manifestent dans la matière propre du niveau. Ici, la reproduction prend la forme des invariances du réseau (un graphe sans étiquetage se reproduit à l'identique sous ses automorphismes). La différenciation prend la forme des brisures de symétrie (car sélectionner un appariement brise le groupe qui permute les appariements). La hiérarchisation prend la forme de l'emboîtement des échelles (l'escalier des échelons). La liaison prend la forme de l'intrication (une face partagée par deux grains est une seule face).

Chaque niveau comporte en outre quatre éléments. Le premier est un capital, c'est-à-dire la grandeur propre du niveau (ici l'information, dont l'unité est le logarithme de deux). Le deuxième est une saturation, c'est-à-dire un gel qui s'étend à mesure que le niveau se développe, jusqu'à fixer une grandeur à une valeur qu'elle ne peut plus quitter. Le troisième est un acte, posé par le niveau de sa propre autorité. Il n'est pas dérivé, mais sa nécessité est établie. Il y a un seul acte par niveau (c'est une régularité observée sur cinq passages, avec une raison algébrique pour les deux premiers seulement, que l'article traite comme une hypothèse d'architecture), et cet acte lève le gel du niveau précédent. Le quatrième est une dette, c'est-à-dire ce que le niveau ne peut pas produire. Il la transmet au suivant en nommant son niveau d'accueil.

1.2 Ce qu'établit le substrat, et comment

On rappelle le parcours du volet précédent. On part de l'espace minimal sur lequel une distinction peut se répéter sans se confondre avec elle-même. Cet espace est fait de deux distinctions binaires, donc de quatre états. Parmi les vingt-quatre permutations de ces quatre états, six forment un cycle qui parcourt les quatre états. Un seul critère combinatoire les sépare (le critère de Gray). Il demande qu'un seul bit change à chaque pas (la distance de Hamming entre deux états successifs vaut un). Deux cycles seulement le satisfont, et ils sont images miroir l'un de l'autre.

C'est le résultat central du programme. Les quatre fonctions sont en effet obtenues au lieu d'être posées. Elles sont les composantes du seul groupe que le critère laisse subsister. De plus, ce critère n'est pas emprunté à la physique. Qu'un pas change une seule distinction à la fois est la forme combinatoire de l'atomicité posée au substrat.

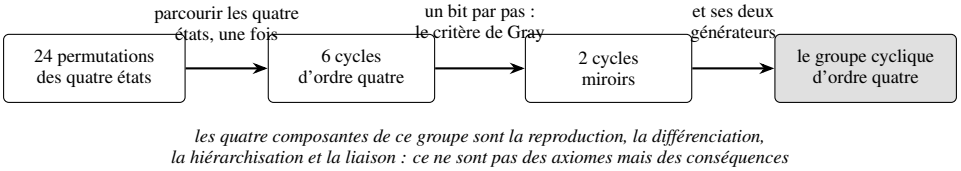


Figure 2: Le parcours du volet précédent. Un espace de quatre états et un seul critère combinatoire donnent le groupe cyclique d'ordre quatre, ses deux générateurs, et les quatre fonctions du programme comme composantes de ce groupe.

Le substrat s'arrête sur ces deux cycles et établit un verrou achiral. Aucune grandeur achirale (entropie comprise) ne peut les distinguer, car ils sont conjugués par l'inversion du générateur. Aucune flèche du temps n'est donc inscrite dans le substrat. Ce qui sépare les deux boucles ne peut être qu'un signe, porté par la phase géométrique que l'orbite acquiert sur son plan de phase (une grandeur impaire sous renversement du temps, et invariante de jauge).

Le tableau 1 indique ce que devient ici chacun des six acquis du substrat.

1.3 Positionnement

La gravité quantique à boucles [3] obtient le groupe $SU(2)$ et l'espace de Hilbert cinématique en quantifiant la relativité générale (dans les variables d'Ashtekar–Barbero). Le paramètre d'Immirzi y est un paramètre libre, que l'on fixe en général par l'entropie des trous noirs, selon un schéma de comptage qui reste discuté. Ici, le groupe et l'espace des états sont

Tableau 1: Ce que lègue le substrat, et ce que devient chaque acquis au présent niveau.

acquis de N_{-1}	**ce qu'il devient ici**
binarité de la distinction	les quatre configurations du grain sont réalisées comme deux bits, et cette réalisation produit la géométrie
atomicité de la distinction	le principe de minimalité (pas de distinction sans fondement)
non-commutativité des primitives	l'algèbre $\mathfrak{su}(2)$, à trois générateurs, lue comme la dimension trois de l'espace
le cycle d'ordre quatre, sélectionné par le critère de Gray	la clôture qui rend le recollement des grains possible
les deux parcours miroirs, porteurs de $+i$ et $-i$	la dette (ce niveau reçoit la place, jamais la valeur)
le verrou achiral	démontré à nouveau ici par une voie spectrale ; il interdit d'orienter l'axe d'ordre

obtenus à partir du substrat logique, sans partir de la relativité générale (sous l'acte et les deux théorèmes importés). Le substrat fournit aussi l'unité du comptage des horizons (deux états par face, soit un bit). Il ne choisit ni le schéma de comptage ni la valeur du paramètre, car un horizon n'est pas un objet de ce niveau (section 8.2). Le cadre cinématique de la gravité quantique à boucles (les réseaux de spins, ici de valence quatre et de spin un demi) devient alors le secteur produit par un foncteur, au lieu d'être le point de départ. Sa dynamique (la contrainte hamiltonienne, les mousses de spins) n'est pas retrouvée à ce niveau.

Les ensembles causaux [4] posent comme primitif un ordre partiel, donc orienté par construction. Ici, l'axe d'ordre est produit, et on démontre, sous deux prémisses énoncées, qu'aucune grandeur de ce niveau ne peut l'orienter. Les reconstructions de la théorie quantique partent d'axiomes opérationnels sur les états, les mesures et leurs probabilités. Ici, l'espace de Hilbert vient de l'enveloppe linéaire des permutations du substrat (l'acte), par les théorèmes de Gel'fand–Naimark et de Peter–Weyl. La règle de Born est reconstruite sous une hypothèse d'additivité, et cette hypothèse reste importée.

Du côté de la matière, les voisins directs sont les symétries de saveur discrètes, où les groupes A_4 (les rotations du tétraèdre) et S_4 (isomorphe au groupe complet du tétraèdre) jouent un rôle central [5, 6], et la grande unification dans $SO(10)$ [7, 8]. Ce travail retrouve le groupe S_4 et la représentation de dimension seize de $SO(10)$, mais avec un autre rôle et une autre origine. Dans les modèles de saveur, le groupe discret agit sur l'indice de famille, et il est choisi au départ. Ici, S_4 est la symétrie d'un point du vide. Il agit sur les cinq états d'un nœud (le triplet et le doublet), tandis que les familles viennent des trois appariements du grain. Les seize états d'une génération s'obtiennent, comme dans la construction connue du spineur de $SO(10)$, en lisant cinq états comme cinq modes fermioniques, et cette lecture est un postulat.

Ce travail ne dérive ni la dynamique, ni la signature, ni la flèche du temps. Il démontre, sous des prémisses qu'il énonce, qu'il ne peut pas les dériver à ce niveau. C'est ce qui le distingue le plus des approches citées. Une construction qui fournirait la signature à partir de la seule structure de ce niveau l'aurait introduite sans la déclarer, car cette structure laisse la signature indéterminée (section 5). Les deux théorèmes d'impossibilité sont donc des résultats à part entière, et réfutables. Il suffirait d'exclure la région dégénérée, ou de montrer une brisure de la conjugaison complexe à ce niveau.

Cette abstention ne laisse pas de trou dans le cadre si ce que ce niveau ne produit pas est produit plus haut, par un mécanisme énoncé d'avance. Chaque grandeur absente est interdite par un gel, et l'acte du niveau suivant doit lever ce gel. Les sept structures qui manquent ici (de l'orientation du temps à la chiralité de l'espace) sont levées au niveau immédiatement supérieur par un seul choix nouveau, celui de $\pm i$, avec des acquis du niveau (section 15). Que ce soit le seul remède reste une conjecture, et le niveau suivant la nomme ainsi.

1.4 Des structures avant les valeurs

La même règle, appliquée à la matière, occupe la seconde moitié de l'article. La matière n'est pas posée à ce niveau, mais au niveau de la matière. Le vide du présent niveau (section 9) fixe pour elle des structures (trois familles, une décomposition en triplet et doublet qui porte la couleur et l'isospin, les seize états d'une génération, ces derniers sous un postulat). Il fixe aussi des plages de valeurs pour les nombres mesurés, mais pas les valeurs elles-mêmes.

Cette limite découle de la façon dont le programme conçoit l'émergence. Si tout était décidé dès la base, chaque niveau ne ferait que dérouler le précédent. Ce qui caractérise un niveau naît des interactions de ses éléments. L'émergence se joue donc dans les ajustements (de faibles valeurs et de petits écarts), qui laissent place à la variabilité et à l'adaptation. La structure est une assiette creuse, qui impose des conditions grossières et robustes. L'ajustement est une assiette plate, où la bille se déplace sous de faibles forces, de sorte que le réglage fin devient possible. Les interactions qui fixent les valeurs (celles des particules entre elles et avec leur support) n'existent qu'à partir du niveau suivant, où le temps s'oriente, et du niveau de la matière, où la matière est posée. La théorie quantique des champs connaît un schéma voisin. Le paramètre « nu » d'une théorie n'est pas observable, et seule la valeur « habillée » par les interactions est accessible à la mesure. Le rapprochement est une analogie, pas une identité.

Cette position pourrait servir d'échappatoire. Elle n'en est pas une si trois conditions sont tenues. D'abord, les plages sont chiffrées, et on vérifie qu'elles contiennent les valeurs mesurées (c'est le cas des dix-huit grandeurs calculées, à l'erreur de mesure près, mais pas de la somme des masses des neutrinos). Ensuite, une valeur hors de sa plage est une tension réelle, et les niveaux suivants devront la corriger dans un sens annoncé d'avance. Enfin, ces niveaux devront réduire le nombre des choix au lieu de l'augmenter. Cet article tient les deux premières conditions. La troisième engage les niveaux suivants.

Et encore une chose. Il n'y a pas de temps à ce niveau, de sorte que les pas d'une simulation de Monte-Carlo ne

décrivent aucune évolution. Ces pas échantillonnent les configurations avec leur poids, un peu comme on estime un climat en accumulant des jours de météo.

2 Le passage, et ce qu'il exige

2.1 Les cinq conditions, et l'acte

Proposition 1 (Ce qu'exige le passage, en trois termes)**.** *Le passage demande au substrat cinq conditions, toutes déjà présentes en lui. Ce sont la fidélité de l'action, la binarité des configurations, la non-commutativité des primitives, leur involutivité et l'extensibilité du recollement. Deux termes étrangers au substrat s'y ajoutent. Le premier est formé de deux théorèmes de mathématiques (Gel'fand–Naimark [9] et Peter–Weyl [10]). Le second est un acte.*

La fidélité exige que l'action du groupe cyclique d'ordre quatre reste injective, ce qui demande au moins quatre configurations. La binarité (transmise du substrat) fait de ces quatre configurations deux bits, et non un objet indivisible. C'est nécessaire, car un objet indivisible n'a que les puissances du cycle, qui commutent, de sorte qu'aucune algèbre de commutateurs n'est engendrée. La non-commutativité des primitives produit cette algèbre. L'extensibilité permet de recoller les grains par produit fibré. Les grains forment donc un réseau sans ajouter de dimension, tant que ce réseau est fermé (section 3.1).

L'involutivité mène jusqu'à la dette du niveau. Les primitives sont des permutations d'ordre deux, donc des matrices symétriques, et leurs commutateurs sont antisymétriques. Par conséquent, l'algèbre est compacte et admet une métrique invariante. Mais l'antisymétrie fait aussi des générateurs de la géométrie des opérateurs anti-hermitiens, qui ne sont pas des observables. L'acte du niveau suivant en fera des observables, par la racine de moins un qu'il choisit.

L'acte est l'enveloppe linéaire des permutations du substrat. On admet ainsi des combinaisons formelles de ce que le substrat ne donnait que séparément. Cet acte n'est pas dérivé, mais sa nécessité est établie. Sans lui, les permutations restent un groupe fini, sans algèbre, donc sans $\mathfrak{so}(3)$, sans espace et sans niveau.

Cet acte ne fournit aucune grandeur physique (pas d'énergie, pas de temps, pas de charge). Il ne choisit pas non plus la signature, qui reste indéterminée après lui. Il donne seulement le droit de superposer. On présente d'ordinaire la superposition comme une bizarrerie des particules (un électron qui passe par deux fentes). Ici, la superposition appartient déjà au grain de l'espace, deux niveaux avant toute particule. La question se déplace donc. La particule est faite d'une étoffe déjà superposée, et c'est l'acte de ce niveau qu'il faut justifier.

Chaque niveau pose un acte et un seul. Ici, c'est l'enveloppe linéaire. Au niveau suivant, c'est le choix d'une racine de moins un. Viennent ensuite la clôture d'une configuration, la liaison et le lien arbitraire. Cette unicité est une régularité observée sur les cinq passages du programme. Elle n'est pas démontrée en général, et ce travail la traite comme une hypothèse d'architecture (section 16, condition (1)). Chaque article établit la nécessité de son propre acte. Elle n'a de raison algébrique que pour les deux premiers passages (l'enveloppe linéaire ne contient pas l'horloge du niveau suivant).

2.2 Pourquoi ce niveau commence

Un niveau naît d'une saturation, et non d'un manque. Le site du substrat (N_{-1}) épuise ses quatre configurations en un seul parcours, sans marge. Cette saturation de cardinalité est levée par le recollement des sites, c'est-à-dire par le lieu (N_0).

Ce qui compte dans une saturation, c'est ce qu'elle interdit. Chaque niveau opère sous un gel (une grandeur fixée à une valeur qu'elle ne peut pas quitter). L'acte du niveau suivant lève le gel, mais pas la borne. Le sens de ce gel varie d'un niveau à l'autre. Au présent niveau (N_0), la grandeur est fixée en un point. En effet, le générateur temporel (anti-hermitien, donc impair sous le renversement du temps, qui est antiunitaire) s'annule, faute de toute grandeur impaire sous ce renversement parmi les observables invariantes du niveau. Au niveau suivant (N_1), la borne est un plancher, car aucun mode ne peut voyager plus lentement que la vitesse limite. Dans les deux cas, seule compte l'absence de jeu, et c'est ce jeu que l'acte restaure.

Le gel change aussi de nature d'un niveau à l'autre. Au substrat (N_{-1}), il est absolu (quatre états et pas plus, sans degré). Aux niveaux suivants, il est croissant. Au présent niveau (N_0), chaque face ajoutée impose un bit de plus et une condition de recollement de plus. La densité d'information est donc fixée à un bit par face, ni plus ni moins. La liberté de l'assemblage diminue ainsi à chaque recollement. Au niveau suivant (N_1), c'est le débit qui sature, car chaque mode voyage à la vitesse limite, sans marge.

La thèse repose sur cette progression (de la cardinalité à la densité puis au débit, de l'absolu au croissant) plus que sur la répétition du mécanisme. Cette progression rend la thèse réfutable, car elle cesserait si deux niveaux saturaient de la même manière. Le tableau 2 met côte à côte la saturation et le gel.

Ce qui est interdit change aussi de nature d'un niveau à l'autre. C'est une indistinction au substrat (N_{-1}), une immobilité au présent niveau (N_0) et une absence de repos au niveau suivant (N_1). Au présent niveau, un seul choix nouveau (celui de $\pm i$), avec des acquis du niveau, lève les sept manques (section 15). Que ce soit le seul remède reste une conjecture.

Un gel qui s'étend n'annonce pas une catastrophe. La saturation est un fait de structure. La description du niveau est complète, et aucune distinction supplémentaire n'est disponible. Toute structure nouvelle demande donc un objet que ce niveau ne contient pas. La levée du gel est la construction de cet objet, et non un événement dans le temps (ce niveau n'a pas de temps).

Tableau 2: Chaque niveau sature. Cette saturation fixe une grandeur à une valeur qu'elle ne peut pas quitter. L'acte du niveau suivant rend son jeu à cette grandeur.

	la saturation	**la grandeur fixée, et ce qu'elle interdit**	**l'acte qui dégèle**
N_{-1}	quatre états (gel absolu)	quatre états et pas plus. Il n'y a aucune place pour une grandeur qui distinguerait les deux parcours, donc pas d'orientation	l'enveloppe linéaire, qui ouvre le recollement des sites (l'orientation attend la sélection de l'unité imaginaire, en N_1)
N_0	un bit par face (gel croissant)	le générateur temporel est fixé à zéro, en un point. Il n'y a ni énergie, ni dynamique, ni flèche	la sélection de l'unité imaginaire (par la racine choisie, les générateurs anti-hermitiens deviennent des observables)
N_1	chaque mode voyage à la vitesse limite (gel croissant)	la vitesse est fixée à sa valeur limite, qui est un plancher. Aucun objet n'est au repos, donc il n'y a pas de masse	la clôture d'une configuration
N_2	les configurations fermées sont isolées	le nombre de partenaires est fixé à zéro, donc il n'y a pas de structure	la liaison
N_3	les structures sont liées mais muettes	le nombre de liens arbitraires est fixé à zéro, donc il n'y a pas de signification	le premier lien arbitraire

3 Le grain élémentaire

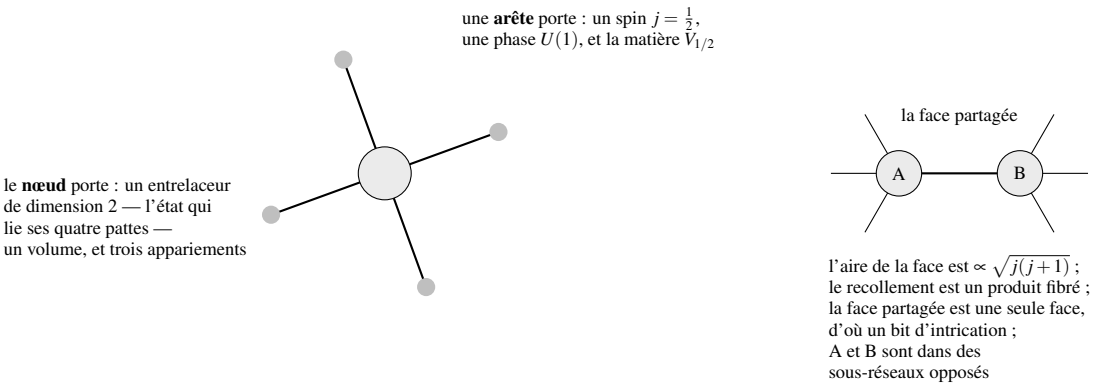


Figure 3: Ce qu'est un grain, et comment deux grains tiennent ensemble. La figure duale du nœud est un tétraèdre. Les quatre arêtes du nœud percent les quatre faces de ce tétraèdre.

Théorème 2 (La factorisation binaire donne l'algèbre $\mathfrak{su}(2)$)**.** *Les quatre configurations du grain sont réalisées comme deux bits, et non comme un objet indivisible à quatre états. Il en résulte des opérations qui ne commutent pas. Déjà, un basculement et l'opération conditionnelle qui lit le bit basculé ne commutent pas. Les commutateurs d'un basculement et des deux opérations conditionnelles (une dans chaque sens) engendrent une algèbre de Lie. Cette algèbre est* $\mathfrak{so}(3) \cong \mathfrak{su}(2)$*, de dimension trois. Aucun ensemble plus petit de primitives ne l'atteint.*

Démonstration. Sur $\{0,1\}^2$, soit X le basculement du premier bit, et soit C l'opération conditionnelle qui bascule le second bit quand le premier vaut 1. Partant de 00, X puis C donne 11. Dans l'autre ordre, C puis X donne 10. Les deux ordres diffèrent, alors que deux basculements indépendants commuteraient. Un basculement et une seule opération conditionnelle ne donnent qu'une algèbre de commutateurs de dimension un (et zéro si l'opération conditionnelle écrit sur le bit basculé, car elles commutent alors). On ajoute alors l'opération conditionnelle dans l'autre sens (qui bascule le premier bit quand le second vaut 1), et on obtient la dimension trois. Les commutateurs sont réels et antisymétriques, et ils laissent fixe le vecteur $(1,1,1,1)$. Cette algèbre est donc $\mathfrak{so}(3)$, isomorphe à $\mathfrak{su}(2)$. Elle est compacte et agit sur $\mathbb{R}^3$ (les configurations moins la direction invariante). La compacité tient au choix de ne fermer que les commutateurs des primitives, car les matrices elles-mêmes engendrent une algèbre non compacte de dimension dix, $\mathfrak{gl}(1) \oplus \mathfrak{gl}(3)$. □

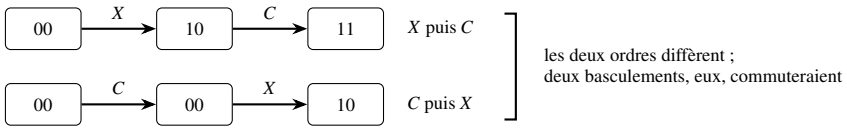


Figure 4: Ce qui produit la géométrie. X bascule le premier bit. C bascule le second bit quand le premier vaut 1. À partir du même état, les deux ordres ne donnent pas le même résultat. Avec l'opération conditionnelle dans l'autre sens, l'algèbre des commutateurs est de dimension trois.

La dimension trois est le nombre de générateurs indépendants de cette algèbre. Le substrat ne fournit pas d'autres générateurs. Une dimension plus élevée demanderait plus de configurations, donc un troisième bit (les commutateurs engendreraient alors $\mathfrak{so}(7)$, de dimension 21), ce que le principe de minimalité exclut. Lire ces trois générateurs comme les trois directions de l'espace est ensuite une interprétation, et non un calcul.

Proposition 3 (La valence quatre)**.** *Trois critères de natures différentes désignent la valence quatre, mais un seul décide. D'abord, la réalisabilité exige une valence paire, car seules les valences paires donnent un espace d'entrelaceurs non vide dans le secteur $j = \frac{1}{2}$. Ensuite, la rigidité dimensionnelle exige $v \geq 3$, car sinon un assemblage gagnerait des directions en grandissant (section 3.1). Enfin, l'information exige* $\dim \geq 2$*, pour qu'il y ait un choix, donc un bit. Les deux premiers critères sont des seuils que plusieurs valences franchissent. Le troisième décide, avec la minimalité du substrat, qui interdit d'aller au-delà. En effet, la dimension vaut exactement deux à la valence quatre, et cinq à la valence six, ce qui fait plus d'un bit.*

Proposition 4 (Le spectre de l'aire)**.** *L'aire portée par une arête (celle de la face qu'elle perce) se lit sur l'invariant quadratique (le casimir) du spin que porte cette arête. Le spectre de l'aire va donc comme $\sqrt{j(j+1)}$, comme en gravité quantique à boucles [3]. Ce spectre est discret, et sa plus petite valeur non nulle ($j = \frac{1}{2}$) est un quantum d'aire. Sa forme suit de cette lecture, sans paramètre, et son échelle est un étalonnage.*

Proposition 5 (Canal défini et volume défini s'excluent)**.** *L'opérateur de volume orienté (le produit mixte des spins de trois pattes, dont la valeur absolue donne le volume) sur un nœud de valence quatre à pattes de spin $\frac{1}{2}$ est de trace nulle, et son spectre est $\{-\sqrt{3}/4, +\sqrt{3}/4\}$. Il est antisymétrique (imaginaire pur) dans une base orthonormée réelle construite sur l'un des deux canaux de recouplage. L'aire de ce canal est diagonale dans cette base. Le volume ne commute donc pas avec l'aire du canal. Un grain de canal défini n'a pas de volume défini, et la variance de son volume est maximale.*

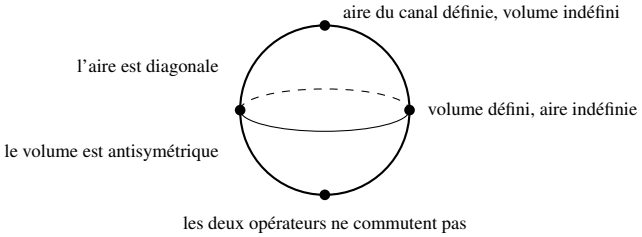


Figure 5: L'espace des entrelaceurs d'un grain est de dimension deux. Ses états forment donc une sphère. L'aire du canal prend ses valeurs définies aux pôles, et le volume prend les siennes sur l'équateur. Les deux ensembles sont disjoints. Sur un état propre du volume, la variance de l'aire est maximale.

L'incertitude est donc produite par la non-commutativité, acquise au substrat, dès que l'acte permet de superposer. D'ordinaire, elle arrive avec la quantification, par la constante de Planck. Ici, elle porte sur des grandeurs purement géométriques et précède toute grandeur dynamique, et la constante de Planck ne fera que lui donner une échelle (la gravité quantique à boucles connaît aussi des opérateurs géométriques qui ne commutent pas, mais elle les obtient en quantifiant une théorie classique). Les deux états de volume défini sont le bit du grain, c'est-à-dire sa *main* (la chiralité de sa forme). Ils ont le même module et des orientations opposées.

Proposition 6 (Deux observables, et pas une de plus)**.** *Les observables invariantes d'un grain isolé forment le commutant de son algèbre (les opérateurs qui commutent avec toutes ses opérations). Ce commutant est de dimension deux (lemme de Schur). Il est engendré par les projecteurs sur les deux blocs de la décomposition des quatre configurations (la direction invariante, de dimension un, et l'espace, de dimension trois). Aucune troisième grandeur invariante n'existe à ce niveau.*

Proposition 7 (Le recollement est un produit fibré)**.** *Recoller deux grains le long d'une face ne consiste pas seulement à les juxtaposer. Le recollement exige que leurs données coïncident sur la face partagée. L'objet obtenu est un produit fibré, de codimension deux par face. C'est donc une contrainte, et non un produit cartésien.*

Esquisse. Chaque grain a une orientation (trois paramètres de rotation), et chacune de ses faces porte un spin et une normale. Le recollement exige d'abord que les deux grains attribuent la même valeur au spin de la face partagée. Il exige ensuite que leurs normales à cette face soient alignées. Après cet alignement, la rotation relative des deux grains n'a plus qu'un paramètre libre (la rotation autour de la normale partagée), au lieu de trois. L'alignement retire donc deux dimensions à l'espace produit, d'où la codimension annoncée. L'objet est, par construction, le produit fibré au-dessus de l'espace des données de face. □

Le produit fibré donne trois choses qu'un produit cartésien n'aurait pas données, la rigidité de l'assemblage, l'intrication et une règle de lecture à travers une face. Selon cette règle, ce qui traverse une face se lit de l'autre côté comme son inverse dans le groupe cyclique d'ordre quatre, $x \mapsto x^{-1}$. La reproduction se lit donc comme hiérarchisation, tandis que la différenciation et la liaison se lisent comme elles-mêmes. L'inversion est le seul automorphisme non trivial de ce groupe, donc la seule manière non triviale de lire un même élément des deux côtés d'une frontière, de sorte que la règle n'est pas un choix libre. La hiérarchie est donc relative, et la réciprocité absolue. On retrouve ainsi, à son niveau le plus bas, la

distinction du programme entre dépendance et cohérence. Reproduction et hiérarchisation sont les deux sens d'un même axe. Différenciation et liaison sont les deux sens d'un autre axe. Un grain ne distingue donc à ce niveau que deux axes de flux, parcourables dans les deux sens. Si chaque grain porte une patte de chaque sorte (c'est l'hypothèse du réseau des flux), il a deux pattes sur chacun de ces axes (une patte est un lien du réseau de spins qui part du nœud). Choisir la paire hiérarchique revient donc à choisir l'un des trois appariements du grain.

3.1 Deux rigidités, à ne pas confondre

Le mot « rigidité » recouvre deux énoncés distincts. La rigidité dimensionnelle (proposition 3) dit qu'un réseau fermé de grains de valence $v \geq 3$ garde une dimension bornée, quel que soit le nombre de grains. La rigidité mécanique exige qu'aucune liberté relative ne subsiste entre les parties. Deux grains qui partagent une seule face gardent une rotation relative libre (l'analogue de la liaison covalente simple). Il faut une seconde face partagée pour bloquer cette rotation. Le compte se fait sur les arêtes. Chaque arête recollée retire deux des trois libertés de rotation relative, de sorte que m grains et E arêtes recollées gardent $3m-2E$ directions, et au moins trois. Le seuil de rigidité est donc $2E \geq 3(m-1)$. Un réseau fermé de m grains de valence quatre a $2m$ arêtes recollées, ce qui le place au-dessus du seuil quel que soit m. Une chaîne n'en a que $m-1$, et elle reste en dessous du seuil pour tout m (dès deux grains). La rigidité est donc rompue par des pattes libres, c'est-à-dire par une frontière, et non par la taille. Les deux rigidités reposent sur le même compte. Pour un réseau fermé de valence v, on a $E = vm/2$, et $3m-2E = (3-v)m$ reste borné si et seulement si $v \geq 3$. La rigidité dimensionnelle porte sur la valence, la rigidité mécanique sur un assemblage donné.

Le recollement change aussi l'espace des états. Deux grains séparés portent un espace d'entrelaceurs de dimension $2 \times 2 = 4$. Compté sur les six pattes restées libres, l'espace de deux grains recollés le long d'une face est de dimension cinq. Les quatre premiers états sont ceux où la face partagée porte le spin $\frac{1}{2}$. Le cinquième demande que cette face porte le spin $\frac{3}{2}$. À spin $\frac{1}{2}$ fixé sur la face, la dimension reste donc quatre. Le gain ne vient pas de la contrainte elle-même, mais de la liberté laissée au spin de la face partagée.

4 L'arène réalisée et la bipartition

4.1 Le pavage réalisé

Proposition 8 (Le groupe complet appartient au point et non au grain)**.** *Le principe de raison suffisante exige que rien ne distingue un grain d'un autre. Le groupe des automorphismes de l'assemblage doit donc agir transitivement. Ce principe n'exige pas que le stabilisateur d'un grain induise sur ses quatre voisins le groupe complet des vingt-quatre permutations, et le grain ne le fournit pas. En effet, une permutation des quatre noms n'est admissible que si elle respecte la lecture à travers une face. Il n'en reste que quatre (l'identité, $R \leftrightarrow H$, $D \leftrightarrow L$, et les deux ensemble), qui forment un groupe $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Le groupe complet du tétraèdre, réflexions comprises, se retrouve un échelon plus haut, sur le* point *(les vingt-quatre grains qui entourent un sommet). Le groupe ponctuel d'un sommet (quarante-huit opérations) contient en effet ce groupe d'ordre vingt-quatre.*

Si l'on exigeait le groupe complet pour chaque grain, on sélectionnerait le réseau diamant [11], seul réseau régulier tridimensionnel à figure de coordination tétraédrique. Or ses grains ne se referment autour d'aucun sommet. Ses plus petits cycles comptent six grains, alors que des grains qui se referment autour d'un sommet forment, par la formule d'Euler, au moins un tour de moins de six grains. Ce réseau n'est donc le dual d'aucune triangulation, et il ne permet pas de former de point. Les déficits d'angle de Regge [12] (qui donnent la courbure d'une géométrie discrète) n'y sont pas définis non plus. L'assemblage doit donc être une triangulation dont tous les grains sont le même tétraèdre.

Proposition 9 (L'arène réalisée : comparaison des arènes)**.** *Parmi les arènes examinées (diamant, cube en six, tétraèdres et octaèdres, disphénoïdes), une seule satisfait à la fois l'identité des grains et l'isotropie collective. C'est la triangulation de Delaunay du réseau cubique centré. Ses grains sont tous le même* disphénoïde *tétragonal (un tétraèdre à quatre faces congruentes), avec deux arêtes longues opposées (l'arête a du cube) et quatre arêtes courtes (la demi-diagonale $a\sqrt{3}/2$). Le réseau en porte six par nœud. Quatre grains tournent autour de chaque arête longue (angle dièdre de $90°$), et six autour de chaque arête courte (angle dièdre de $60°$). Les deux tours se referment exactement, et tous les déficits de Regge s'annulent. Le vide est donc plat.*

Des tétraèdres réguliers posés sur la même combinatoire laisseraient des déficits de $-63{,}2°$ et $+77{,}9°$. C'est donc la forme du grain qui rend l'espace plat. L'isotropie est aussi d'un ordre plus élevé que sur le réseau diamant. Pour un champ scalaire sur le graphe des grains, l'écart relatif de fréquence entre deux directions n'apparaît qu'à l'ordre $(k\ell)^4$, où ℓ est la distance entre grains voisins, contre $(k\ell)^2$ sur le réseau diamant (section 13.3). Le pavage porte trois agrégats emboîtés qui reviennent partout, le grain, le point (les vingt-quatre grains autour d'un sommet, ce que la géométrie des triangulations appelle l'*étoile* de ce sommet), dont la frontière compte vingt-quatre liens, et le point de points (le point et les points de ses quatorze sommets voisins, soit cent quatre-vingt-douze grains), dont la frontière compte quatre-vingt-seize liens.

Remarque 10 (Statut)**.** L'arène est la prémisse la plus chargée du travail. Sa part empruntée est explicite (la comparaison des pavages, le calcul de Regge). Sa part propre est la proposition 8, qui place le groupe complet sur le point. Cette prémisse porte aussi l'isotropie. Trois résultats du niveau suivant ont d'abord été établis sur le réseau diamant (la transparence du vide, la valeur de la vitesse limite et l'inventaire des sept lieux d'une perturbation). Les deux premiers sont rétablis

sur cette arène. La vitesse limite y garde sa valeur pour une autre raison (c'est le réseau qui est isotrope, et pas le grain). L'inventaire des sept lieux n'est pas rétabli, car son théorème supposait que S_4 agit au grain. Il est à refaire au niveau suivant (section 16.3). Un seul fait suffirait à réfuter la prémisse, un cycle impair dans l'assemblage, car cette arène n'en contient aucun. La section 16 en tire la condition de réfutation la plus nette du travail.

4.2 La bipartition et ce qu'elle porte

Proposition 11 (Bipartition)**.** *L'arène est bipartie. Ses grains forment exactement deux sous-réseaux, et deux grains adjacents sont toujours dans des sous-réseaux opposés. La partition est unique, à un échange global des noms près. Elle ne coûte rien au capital du niveau (l'information), et elle ne porte aucune orientation.*

Esquisse. L'espace pavé est simplement connexe. Tout cycle du graphe des grains se décompose donc (modulo deux) en tours autour des arêtes de la triangulation. Ces tours comptent quatre grains (autour d'une arête longue) ou six grains (autour d'une arête courte). Tous les cycles sont donc pairs, et les plus courts comptent quatre grains. Une construction directe sur une boîte périodique confirme deux sous-réseaux de même taille (384 et 384 grains sur une boîte de 4^3 mailles cubiques). L'unicité découle de la connexité, car le sous-réseau d'un grain fixe celui de tous les autres. Cette appartenance ne coûte rien, car elle est une fonction de la connectivité déjà fixée, et non une donnée stockée sur le grain. □

Remarque 12 (Ce que la bipartition ne porte pas)**.** Le calcul exclut de lire une orientation dans la bipartition. Sur les quarante-huit opérations du groupe ponctuel d'un sommet, vingt-quatre échangent les deux sous-réseaux, douze propres (de déterminant positif) et douze impropres (calcul fait sur l'arène). Si l'échange suivait l'orientation, les opérations qui l'effectuent seraient exactement les vingt-quatre opérations impropres. La répartition est égale, donc l'échange n'est pas corrélé au déterminant (l'inversion centrale, qui est impropre, n'échange pas les sous-réseaux). Or c'est le déterminant qui distingue l'orientation (une opération propre la conserve, une opération impropre la renverse). Une distinction non corrélée au déterminant ne porte donc aucune orientation.

Une distinction orientée distinguerait un premier et un second sous-réseau, donc un sens à ce niveau. Son absence s'accorde avec ce que ce niveau laisse indéterminé, la nature de l'axe d'ordre (théorème 13, dont la région dégénérée reste ouverte) et son sens (verrou achiral, théorème 14).

La suite emprunte aux niveaux supérieurs des faits établis sans la bipartition, de sorte que le renvoi est licite au sens de l'introduction.

Dans ce modèle, la connectivité est permanente, car aucun niveau supérieur ne recâble le graphe. Les liaisons des niveaux suivants sont des produits fibrés, qui contraignent les états sans toucher aux arêtes (c'est établi au niveau de la dynamique). Le modèle diffère en cela des triangulations dynamiques [13], qui somment sur les triangulations et dont les mouvements locaux changent la connectivité (insérer un sommet dans un tétraèdre crée quatre grains voisins deux à deux, donc des cycles de trois grains). Cette permanence est donc propre au modèle, et non empruntée. Une fois acquise, la bipartition ne peut plus être défaite.

Aucune observable de ce niveau ne lit le sous-réseau d'un grain, et aucune ne le peut si elles sont invariantes sous le groupe de symétrie de l'arène, comme le suppose la démonstration du verrou achiral (prémisse (P2), théorème 14). En effet, la moitié des opérations du groupe ponctuel échangent les deux sous-réseaux (remarque 12). Le niveau suivant ne le lit pas non plus, car son lemme d'anticommutation établit qu'aucun mode propagatif n'est porté par un seul sous-réseau. Sur cette arène, le lemme tient sous une forme modifiée, car les deux sous-réseaux n'y sont pas des réseaux de Bravais (la translation qui mène d'un sommet du cube à son centre les échange). Le partenaire d'un mode de vecteur d'onde k se trouve alors en $k+H$ (H est un sommet de la zone de Brillouin), et non en k. Le sous-réseau n'est lu qu'au niveau de la matière, et sous une autre forme. L'attachement d'une configuration fermée y permet de le lire comme l'espace interne du doublet électrofaible. La section 10 retrouve le doublet par un autre chemin, comme la représentation de dimension deux de la symétrie du point. Le niveau de la matière devra établir que les deux lectures coïncident.

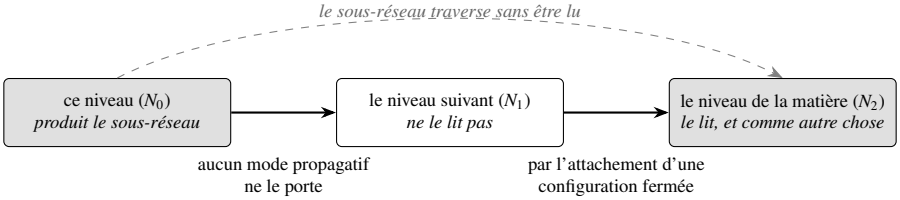


Figure 6: Une structure que ce niveau produit sans en avoir l'usage. Aucune observable de ce niveau ne lit cette étiquette. Deux niveaux plus haut, elle est lue comme un indice qu'une interaction distingue.

4.3 Les trois appariements sur cette arène

Les quatre pattes d'un grain s'apparient de $(4-1)!! = 3$ façons. Sur un grain isolé, où rien ne distingue les pattes, ces trois appariements sont équivalents (un quotient d'ordre six du groupe des permutations des quatre pattes les échange, section 8.1). Sur l'arène, un appariement suit les deux arêtes longues du disphénoïde, et les deux autres suivent des arêtes courtes. La forme du grain distingue donc un appariement, l, et laisse deux jumeaux, a et s (figure 7). Nous appelons

organisation d'un grain l'appariement qu'il réalise, c'est-à-dire la paire de ses pattes qui est hiérarchique. Deux grains voisins de même organisation prolongent leurs flux sans rupture, et leur lien est dit *accordé*. La section 9 pondère les configurations par le nombre de liens accordés. Les trois appariements y reparaissent comme les organisations qu'un vide peut choisir, puis comme trois familles à la section 10.

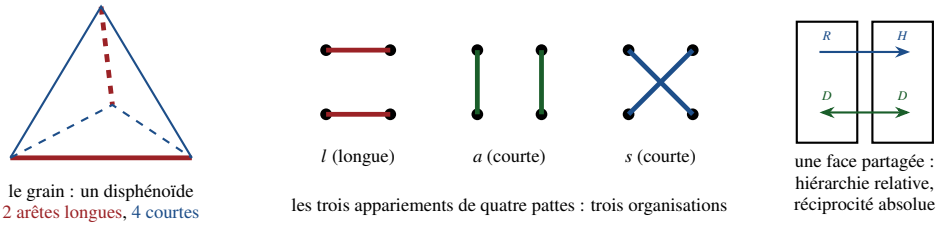


Figure 7: Le grain de l'arène et ses organisations. À gauche, le disphénoïde. Au centre, les trois façons d'apparier quatre pattes en une paire hiérarchique et une paire réciproque ; la forme du grain distingue l (arêtes longues) des deux jumelles a, s (arêtes courtes). À droite, la lecture à travers une face partagée (R se lit H de l'autre côté, D se lit D).

5 Deux impossibilités

Pour mesurer une distance, il faut savoir quels carrés s'ajoutent et lesquels se retranchent (c'est la signature). Ce niveau produit un axe d'ordre et trois directions sans dire comment les combiner. Les carrés peuvent tous s'ajouter (cas euclidien), ou celui de l'axe d'ordre peut se retrancher (cas lorentzien). Il existe une troisième possibilité, souvent oubliée, où l'axe d'ordre n'a aucune longueur et sert seulement à ordonner.

Théorème 13 (La signature n'est pas dérivable à ce niveau)**.** *Toute forme bilinéaire symétrique invariante sur l'espace des configurations s'écrit comme une combinaison des deux projecteurs isotypiques. L'espace des formes invariantes est donc un plan. Ce plan contient trois régions (euclidienne, lorentzienne et dégénérée), et les trois régions sont également admissibles. Si l'on demande aux trois directions d'avoir une longueur, la région dégénérée est celle où l'axe d'ordre n'en a pas. L'indétermination porte donc sur la nature de l'axe d'ordre, et pas seulement sur un signe.*

Esquisse. On résout $X^{\mathsf{T}}G + GX = 0$ sur une forme symétrique générique de $\mathbb{R}^4$, pour X parcourant l'algèbre du niveau. Il reste deux paramètres. On obtient $G = aP_1 + bP_3$, où P_1 et P_3 sont les projecteurs des deux blocs isotypiques. Aucune grandeur du niveau ne contraint le rapport a/b. □

Ce théorème et la proposition 6 sont un seul énoncé, écrit sur les formes ou sur les opérateurs. En effet, les opérations du niveau sont antisymétriques ($X^{\mathsf{T}} = -X$), de sorte que l'équation $X^{\mathsf{T}}G + GX = 0$ s'écrit $[G, X] = 0$. Une forme invariante est donc un élément symétrique du commutant, et tous les éléments du commutant sont symétriques. L'espace des formes invariantes a donc la dimension du commutant (deux), et cette égalité n'est pas un accident du calcul.

Une grandeur est paire sous renversement si elle ne change pas quand on renverse le sens du parcours (l'énergie cinétique d'une bille est paire, sa vitesse ne l'est pas). Or on ne peut pas orienter un axe avec des grandeurs qui ignorent que cet axe a deux bouts. Le théorème suivant repose sur ce fait.

Théorème 14 (Le verrou achiral)**.** *Le théorème de Wigner ne laisse à une symétrie que deux formes, unitaire ou antiunitaire. Le renversement du temps est la forme antiunitaire, $\Theta = K \circ U$, où K est la conjugaison complexe et U un opérateur unitaire (en mécanique quantique, c'est ce qu'impose une énergie bornée inférieurement ; ce niveau n'a pas d'énergie, et l'on prend donc cette forme comme définition du renversement). Deux prémisses distinctes sont alors requises. (P1) La conjugaison K est, à ce niveau, une symétrie non brisée. (P2) La partie unitaire U appartient au groupe de symétrie du niveau. Sous ces deux prémisses, toute observable invariante de ce niveau (un élément du commutant, proposition 6) est paire sous renversement. Aucune de ces observables ne peut donc orienter l'axe d'ordre.*

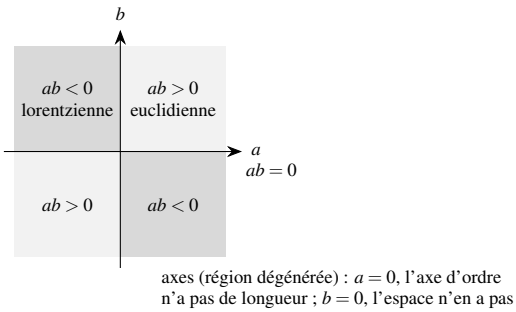


Figure 8: Le plan des formes invariantes et ses trois régions. Les axes forment à eux seuls une troisième région, et non des frontières. Sur l'axe $a = 0$, l'axe d'ordre n'a pas de longueur ; sur l'axe $b = 0$, ce sont les trois directions qui n'en ont pas.

Démonstration. Soit F une observable invariante du niveau. Par (P2), U est une symétrie du niveau, donc $F(U\psi) = F(\psi)$. Par (P1), $F(K\psi) = F(\psi)$. On en déduit $F(\Theta\psi) = F(KU\psi) = F(U\psi) = F(\psi)$. □

La première prémisse n'est pas un postulat libre, car les deux caractères fidèles du groupe cyclique sont interchangeables à ce niveau. Pour briser K, il faudrait choisir une racine de moins un, par laquelle les générateurs anti-hermitiens deviennent des observables, et ce choix est l'acte du niveau suivant. Cela ne contredit pas la section 2, où l'involutivité des primitives faisait des générateurs de la géométrie des opérateurs anti-hermitiens, car un opérateur peut exister sans être une observable (ces générateurs portent la géométrie, mais on n'en tire ici aucune observable). L'acte du niveau suivant n'invente donc rien, il rend observable ce qui existait déjà (ces générateurs multipliés par la racine choisie, qui sont hermitiens). C'est pourquoi la condition de réfutation énoncée plus loin porte sur l'unicité de l'acte par niveau, et pas sur K lui-même.

Remarque 15 (Deux démonstrations, par deux voies)**.** Le substrat établit le même verrou par une voie combinatoire (les deux boucles miroirs sont conjuguées par l'inversion du générateur [2]), ce niveau par une voie spectrale. Les deux voies partent du même fait (l'inversion du générateur échange les deux caractères fidèles $\pm i$), mais elles le lisent avec deux instruments différents. Leur accord montre donc que le verrou appartient à la structure, et pas à l'outil de calcul.

Proposition 16 (L'absence de dynamique, sous (P1) et (P2))**.** *Un niveau sans grandeur impaire sous renversement ne peut pas avoir de générateur temporel non nul. En effet, un tel générateur devrait commuter avec les opérations du niveau (P2). Il ne pourrait pas non plus faire appel à une racine choisie de moins un (P1), donc il serait réel et antisymétrique. Or le commutant ne contient que les combinaisons symétriques $aP_1 + bP_3$. Le générateur est donc nul.*

Cette absence de dynamique est le gel de ce niveau au sens du tableau 2. Elle est déduite et non posée, car les deux prémisses du verrou suffisent. En physique ordinaire, un hamiltonien pair sous renversement peut être non nul (il s'écrit e^{-iHt} avec une racine de moins un choisie). L'argument repose donc sur le fait qu'aucune racine de moins un n'est choisie à ce niveau (prémisse P1), et pas sur la seule parité des grandeurs.

Avec une racine choisie, l'opérateur $-i(aP_1 + bP_3)$ devient un générateur admissible et non nul. Comme il commute avec les opérations du niveau, il ne mélange pas les deux blocs, et l'acte du niveau suivant lève donc le gel sans rien mélanger. Les opérateurs qui mélangent les blocs (les boosts) viennent du même choix, mais par un autre effet, et ce ne sont pas des générateurs temporels (section 15).

Un énoncé de même forme apparaît, de façon indépendante, dans la gravité quantique canonique (la contrainte hamiltonienne $\hat{H}\Psi = 0$ [14, 3]), pour une autre raison (l'invariance par changement de la coordonnée de temps). L'accord porte sur la forme de l'énoncé, pas sur l'identité des opérateurs. Ici, c'est le générateur lui-même qui s'annule, et c'est cette annulation que l'acte du niveau suivant lève. La contrainte $\hat{H}\Psi = 0$ porte sur les états du tout, et elle demeure au niveau suivant, où la dynamique est relationnelle (une partie du tout sert d'horloge au reste).

Ces deux théorèmes sont réfutables, à la différence d'un simple aveu d'ignorance. Il suffirait de trouver à ce niveau une grandeur qui fixe le rapport a/b ou qui exclut l'une des trois régions (la région dégénérée, par exemple), ou d'y montrer une brisure de la conjugaison. Ils closent aussi trois questions (l'orientation du temps, la signature, la dynamique), qu'on chercherait sinon ici sans jamais savoir si un échec tient à la structure ou au manque d'ingéniosité du chercheur. L'effort se reporte donc sur l'acte du niveau suivant, qui les rouvre toutes les trois à la fois.

6 Le foncteur, et la structure interne

Le passage se formule comme un foncteur, construit en quatre étapes. D'abord, on part de la catégorie dont les objets sont les configurations du substrat et dont les morphismes sont ses opérations. Ensuite, on prend l'enveloppe linéaire des morphismes (c'est l'acte). Puis on applique les théorèmes de Gel'fand–Naimark et de Peter–Weyl à l'algèbre involutive normée ainsi obtenue. Le premier la représente sur un espace de Hilbert, le second décompose cet espace en composantes isotypiques. Enfin, on se restreint au secteur de valence quatre où les spins valent un demi (ses entrelaceurs sont alors de dimension deux). Parmi les secteurs où les quatre spins sont égaux, c'est le seul où la valence quatre porte exactement un bit, et le seul où les appariements forment un diagramme de poids (section 8.1).

Le foncteur ne transmet la binarité qu'en partie (la place d'un bit, jamais sa valeur). Il transmet la non-commutativité, qui devient $\mathfrak{su}(2)$. Il crée le lieu, l'arête, la face et le volume, qui n'existent pas au substrat. Il ne transmet ni la valeur des deux parcours miroirs, ni celle du bit du grain, qui sont les deux sélections de la dette.

6.1 La structure interne, et ses deux lectures

Chaque échelon porte un système et la fonction qui le produit. Systèmes et fonctions forment deux suites, qui ne s'enchaînent pas de la même manière. La suite des systèmes (tableau 3) est une agrégation. Chaque système rassemble plusieurs éléments du précédent, donc l'emboîtement est littéral. La suite des fonctions, formée des quatre composantes du cycle d'ordre quatre établi au substrat, est une composition, car chaque fonction s'applique au produit de la précédente.

Les deux lectures se correspondent échelon par échelon, car chaque système est le produit d'une fonction appliquée au système précédent. Il y a cinq échelons et non quatre, car le premier (le nœud) est reçu du niveau précédent. C'est par le nœud que la clôture du cycle inférieur devient l'entrée du cycle supérieur.

Un grain isolé ne porte que deux observables invariantes (proposition 6), car il n'est que l'échelon zéro, et ce sont les échelons suivants qui ajoutent des observables. De même, dans les simulations, les familles et la couleur se trouvent sur le

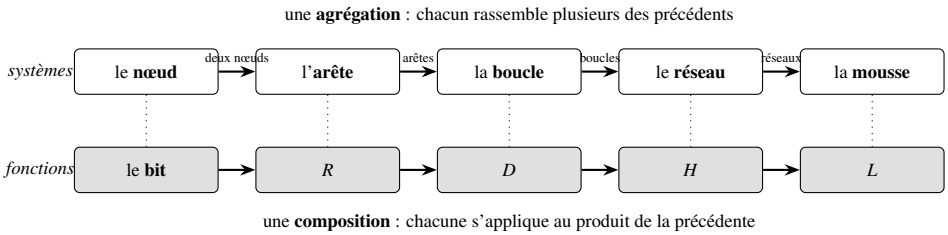


Figure 9: Un escalier, lu de deux façons. La ligne du haut donne les systèmes, qui forment une agrégation. La ligne du bas donne les fonctions, qui se composent.

Tableau 3: Les cinq échelons : système porté, fonction qui le produit, contenu géométrique et force de la signature.

	système, et sa fonction	**contenu géométrique**	**signature**
0	le nœud — bit	grain de valence quatre, dual d'un tétraèdre ; il porte un bit	forte
1	l'arête — R	relation entre deux nœuds ; sa donnée est la phase accumulée le long de l'arête	forte
2	la boucle — D	premier circuit fermé ; la phase accumulée autour du circuit, où se lit le déficit angulaire de Regge (nul dans le vide plat)	forte
3	le réseau — H	entrelacement de boucles, c'est-à-dire l'espace proprement dit	faible
4	la mousse de spins — L	histoire de réseaux ; elle clôt le niveau et ouvre le suivant	faible

point et pas sur le grain (sections 9 et 10).

La dernière colonne du tableau sert de test pour cette lecture en escalier (le mot « signature » n'y a pas le sens métrique de la section 5). Une signature est forte quand l'échelon produit une grandeur nouvelle et calculable, faible quand il produit une structure reconnaissable, mais pas quantifiable à ce niveau. Trois échelons sur cinq portent une signature forte. Le test n'est donc réussi qu'en partie, et ce n'est pas une confirmation.

Selon le programme, cette forme d'escalier ne vaut pas à tous les niveaux. Ici, le cycle des quatre opérations est parcouru une fois, puis il s'arrête, car la clôture n'est pas du même type que l'entrée. Aux niveaux des structures composites et du symbolique, elles sont du même type (une structure composite est ce que la reproduction prend en entrée, et un symbole peut porter sur un autre symbole). Le cycle devrait donc s'y rejouer sur son propre produit, et la structure interne y deviendrait une spirale de quatre tours au lieu d'un escalier unique (la règle des échelons vaudrait alors par tour et non par niveau). Ces niveaux ne sont pas encore construits, et ce point reste à établir.

Le niveau de la dynamique a établi, sur le réseau diamant, un inventaire fermé de sept lieux où une perturbation des données de ce niveau peut vivre (déduits de trois acquis du présent article et des cinq représentations irréductibles du groupe de symétrie S_4). Ce compte suppose que S_4 agit au grain, alors que sur la présente arène S_4 est le groupe du point et agit librement sur ses vingt-quatre grains. Il est donc à refaire au niveau suivant (section 16.3). Sous cette réserve, il contraint en retour la lecture de nos objets. Si une arête ne portait que sa phase, l'inventaire tomberait à six lieux. Si le compte se rétablit, une arête doit donc porter deux données, sa phase et la représentation de matière, comme la section sur le grain l'avait supposé. Le niveau supérieur appuie donc ce choix après coup, sans encore le confirmer.

7 L'intrication, et la dichotomie fermions–bosons

Proposition 17 (Une face partagée n'est pas factorisable)**.** *Deux grains recollés ne forment pas un état produit. En effet, la face partagée est une seule face, et la contrainte de recollement corrèle les deux entrelaceurs. L'entropie d'intrication portée par la face partagée vaut exactement* $\ln 2$.

Proposition 18 (Monogamie)**.** *Une face a deux côtés et non trois. Le bit qu'elle porte est donc partagé entre deux grains, et par aucun troisième. La monogamie de l'intrication se lit donc ici sur la géométrie, sans recourir au théorème général de monogamie (un bit maximalement intriqué avec un partenaire ne peut pas l'être avec un troisième), qui est respecté.*

Ce bit partagé est l'unité du capital du niveau. On retrouve la même valeur dans le modèle de Heitler et London, où la partie de spin d'une liaison covalente simple est le singulet des deux électrons. La matrice réduite du spin d'un électron est proportionnelle à l'identité, et son entropie vaut $\ln 2$. L'analogie est exacte sur ce point, car une unité partagée porte exactement un bit, entre deux grains comme entre deux atomes.

La violation des inégalités de Bell n'est pas dérivée ici, car elle découle d'un théorème du cadre hilbertien, que l'acte introduit sans le construire. Ce qui est établi est plus sûr. Les ingrédients quantiques d'une violation sont présents dès ce niveau (des opérations qui ne commutent pas et un état non factorisable, théorème 2 et proposition 17), ainsi que la monogamie (proposition 18). L'article n'explique donc pas l'intrication. Il montre seulement que, dans ce cadre, elle n'est pas un phénomène de la matière et précède la particule, l'onde et la masse. Elle traduit le fait que le réseau n'est pas un produit.

Proposition 19 (La dichotomie vient de la parité du substrat)**.** *La parité* ε *du cycle d'ordre quatre sépare les quatre opérations en deux classes (la reproduction et la hiérarchisation sont impaires, la différenciation et la liaison sont paires). Le foncteur transmet cette parité. Elle se réalise alors comme l'action du centre du groupe de structure, c'est-à-dire* $\{\pm 1\}$*, qui agit par* $(-1)^{2j}$*. On obtient ainsi deux classes. Lues comme deux comportements sous échange, elles donnent la*

symétrie, et l'antisymétrie dans le cas impair.

L'étape décisive tient au groupe de structure. C'est $SU(2)$, dont le centre $\{\pm 1\}$ est le seul sous-groupe d'ordre deux. La parité du substrat est elle-même d'ordre deux. Si elle se réalise fidèlement dans $SU(2)$, elle n'a qu'un seul endroit où se réaliser, et il y a exactement deux classes statistiques (ni une ni trois). Ce résultat porte sur le nombre de classes, et pas encore sur le lien entre spin et statistique. Il est obtenu sans les ingrédients que le théorème spin-statistique habituel juge indispensables (invariance de Lorentz, positivité de l'énergie, causalité).

Remarque 20 (Ce qui est établi, et ce qui ne l'est pas)**.** Ce niveau n'a ni fermion, ni spin de particule, ni champ, ni dynamique (les spins $\frac{1}{2}$ des arêtes sont des étiquettes de géométrie). Il a seulement la structure à deux classes. Le niveau suivant réalise cette structure comme une polarisation, et le niveau d'après comme une statistique.

Remarque 21 (Compatibilité avec le verrou)**.** L'action du centre est achirale, car elle commute avec la conjugaison. Elle ne sépare donc pas les deux orbites miroirs. Un invariant qui séparerait ces orbites violerait le verrou, et la dichotomie n'est pas un tel invariant.

8 Les appariements, et le paramètre d'Immirzi

8.1 Les appariements, et leur géométrie

Proposition 22 (Les appariements forment un diagramme de poids)**.** *Les trois états d'appariement d'un grain sont liés par une relation linéaire (la relation de Mandelstam, c'est-à-dire l'identité de $SU(2)$ entre les trois produits de deux singulets, qui exprime qu'on ne peut pas apparier quatre pattes de trois façons indépendantes). Avec la convention de signes de la démonstration, ces trois états sont trois vecteurs d'un plan, de somme nulle et à 120° les uns des autres.*

Esquisse. Les trois états d'appariement engendrent un espace de dimension deux et non trois. En effet, la relation de Mandelstam les lie avec des signes alternés (on prend la convention $(+,-,+)$ sur $(12)(34)$, $(13)(24)$, $(14)(23)$, et sous cette convention leur somme s'annule). On calcule alors la matrice de Gram des états normalisés dans le secteur de spin un demi. Elle donne des normes égales et des produits scalaires égaux à $-\frac{1}{2}$, c'est-à-dire des angles de 120°. Avec les trois signes $+$, on obtiendrait des angles de 60°, 120°, 60° et une somme non nulle, de sorte que la convention compte. □

Le mot « diagramme de poids » désigne ici la figure (trois vecteurs égaux à 120°, de somme nulle), la même que celle des poids du triplet fondamental de $SU(3)$, sans faire des appariements une représentation de $SU(3)$.

Les permutations des quatre pattes agissent sur les trois appariements par un quotient d'ordre six (les permutations de trois objets). Sur les trois étiquettes, cette action est la somme de la représentation triviale et de celle de dimension deux. Sur les états, qui n'engendrent qu'un plan, il ne reste que celle de dimension deux, qui dessine la figure à 120°. Ce sont donc trois *organisations*, et pas un triplet. Le triplet qui portera la couleur se trouve ailleurs, sur les cinq états d'un nœud qui porte une patte de plus (section 10). Les quatre spins d'un grain définissent aussi un troisième espace de dimension trois, celui des façons indépendantes de les composer en un spin total un (et non zéro, de sorte que ces états ne referment pas le grain). Les permutations des quatre pattes y agissent fidèlement, par la représentation standard. Aucun espace d'entrelaceurs d'un assemblage de grains n'est de dimension trois (à pattes de spin un demi, les dimensions accessibles sont $1,2,5,14,42,\ldots$), donc un triplet ne peut pas venir des appariements. Il ne faut pas confondre ces trois « trois » (section 12.1).

8.2 Le paramètre d'Immirzi

Un horizon n'est pas un objet de ce niveau, qui n'a ni gravitation, ni énergie, ni dynamique. Il demande un temps orienté et une vitesse limite (niveau suivant, N_1) et une masse (niveau de la matière, N_2). Mais compter les états portés par une surface est une question cinématique, et ce niveau a des faces, des aires quantifiées et des états par face. Il peut donc dire en quelle unité se fait le comptage, mais pas de quels liens un horizon est fait.

Proposition 23 (Jauge dans le volume, physique à une frontière)**.** *Une grandeur est de jauge si une redéfinition peut l'absorber. Dans le volume, le résidu $U(1)$ d'une face est partagé par deux entrelaceurs. On peut l'absorber en redéfinissant l'un ou l'autre entrelaceur, donc ce résidu est redondant. À une frontière, il n'y a qu'un seul entrelaceur, et rien ne peut absorber le résidu, qui y est donc physique.*

Proposition 24 (L'unité du comptage : deux états par perforation)**.** *Toutes les pattes du niveau portent le spin $\frac{1}{2}$, et chaque face est percée par une seule patte. Une perforation faite de ces liens a donc exactement deux états, $m = \pm\frac{1}{2}$, et elle apporte $\ln 2$ à l'entropie (un bit par face). Les deux poids de la littérature coïncident sur elle ($2 = 2j+1$ en $j = \frac{1}{2}$).*

Esquisse. Par la proposition 23, l'entropie d'une surface compte des modes de bord. Ces modes sont étiquetés par la charge m, valeur propre de $J \cdot n$. En $j = \frac{1}{2}$, la théorie des représentations ne laisse que $m = \pm\frac{1}{2}$. Le comptage de Domagała et Lewandowski [15] et de Meissner [16] (poids 2) et celui de Ghosh et Mitra [18] (poids $2j+1$) donnent donc le même nombre, deux. □

On écrit que l'entropie d'un horizon vaut le quart de son aire en unités de Planck, l'aire d'une face valant $8\pi\gamma\ell_P^2\sqrt{j(j+1)}$. Si l'horizon ne comptait que des liens de spin $\frac{1}{2}$, l'équation de comptage n'aurait qu'un terme, $2e^{-\pi\gamma\sqrt{3}} = 1$, et l'on

aurait $\gamma = \ln 2/(\pi\sqrt{3}) \simeq 0{,}127$. C'est la valeur d'Ashtekar, Baez, Corichi et Krasnov (1998) [17]. Elle a été abandonnée, car un horizon de la relativité générale comporte des perforations de tous spins $j \geq \frac{1}{2}$, et l'équation devient alors $\sum_{j\geq 1/2} w(j)\, e^{-2\pi\gamma\sqrt{j(j+1)}} = 1$. Le poids $w = 2$ donne $\gamma \simeq 0{,}23753$ (Domagała et Lewandowski, Meissner), et le poids $w = 2j+1$ donne $\gamma \simeq 0{,}27407$ (Ghosh et Mitra).

Remarque 25 (Ce qui est fourni, ce qui est emprunté, ce qui est renvoyé)**.** Ce niveau fournit l'unité du comptage (deux états par perforation de spin $\frac{1}{2}$, $\ln 2$ par face) et la forme du spectre de l'aire. Les valeurs 0,2375 et 0,274 supposent en plus des perforations de tous spins, dont la répartition sur l'horizon est empruntée, comme l'équation de comptage et la condition de bord (qui vient de la relativité générale). Le niveau ne fournit pas non plus le schéma de comptage. Le poids 2 se lit sur le résidu $U(1)$ d'une face (proposition 23). À une frontière, on compte la charge m, et à m fixée on retient $j = |m|$, où l'aire est minimale. Mais ce dernier pas est la prescription de Domagała et Lewandowski elle-même, et la fermeture d'un grain en singulet $SU(2)$ plaiderait aussi bien pour le poids $2j+1$. Le poids 2 est donc une lecture, et non une dérivation.

La valeur de γ devient ainsi une dette du niveau, avec deux niveaux d'accueil, le niveau suivant et celui de la matière. Ou bien ces niveaux font apparaître sur un horizon des spins effectifs plus grands que $\frac{1}{2}$ (par regroupement de grains), et l'on retrouve 0,2375 ou 0,274 (le mode de regroupement dira lequel). Ou bien l'horizon reste fait de liens de spin $\frac{1}{2}$, et $\gamma \simeq 0{,}127$, avec un quantum d'aire différent. Le niveau fixe la structure (le bit par face, une assiette creuse), et la valeur se règle plus haut, sur une assiette plate.

9 Le vide ordonné

Tout ce qui précède est cinématique, démontré ou posé comme tel. La suite décrit un réseau à un seul couplage J (la force du lien entre deux grains), échantillonné numériquement. Ses résultats sont calculés.

La règle de poids. Une configuration de l'arène attribue à chaque grain l'une de ses trois organisations. Le poids de cette configuration vaut

$$P \propto e^{J N_{\text{acc}}}, \tag{1}$$

où N_{acc} est le nombre de liens accordés. Le couplage J est le seul paramètre du réseau. On échantillonne les configurations par la méthode de Metropolis [19]. Chaque pas propose de retourner un anneau alterné de quatre ou six grains autour d'une arête. Ce mouvement conserve à chaque grain ses deux pattes de chaque sorte. Le poids décide si le pas est accepté. Ces pas ne sont pas un temps. Le logarithme de la rareté d'une forme (l'énergie libre F) donne son prix, et la section 10 tire une masse de ce prix (plus la forme est coûteuse, plus elle est légère).

Proposition 26 (Le seuil de l'ordre ; calculé)**.** *La symétrie que le vide peut briser est l'échange des deux organisations courtes, que l'arène traite également. On a calculé les cumulants de Binder pour quatre tailles de réseau. Les croisements des trois plus grandes, de* 3 072 *à* 24 576 *grains, situent le seuil de l'ordre en* $J_c = 0{,}3395 \pm 0{,}0005$. *Au-delà de ce seuil, le vide choisit l'une des deux organisations courtes.*

On retrouve ainsi le seuil critique et l'attracteur (ici le vide ordonné) que le volet précédent posait comme conditions de l'émergence. Le choix entre les deux jumelles est un tirage figé (comme le côté de la route où l'on roule), et aucune masse ne dépend de ce choix. La mise en ordre est rapide, et sans signe de premier ordre jusqu'à 82 944 grains. La distribution de l'énergie n'a qu'un pic, et la chaleur spécifique ne croît pas avec le volume, au seuil comme un peu plus bas, là où le cumulant de Binder devient négatif (critère écrit d'avance [20]). Une transition continue, qu'exige une limite continue, reste donc possible. Près du seuil, les énergies libres sont très sensibles à J, avec des pentes dF/dJ de l'ordre de 150 à 190.

La durabilité. Dans le programme, un système dure s'il tient ensemble deux exigences opposées. La première est la *complexité* de ses échanges. Elle mesure l'écart entre les flux réels à sa frontière et l'échange idéal, où les quatre flux circulent à parts égales et sont tous transmis (la complexité vaut un quand cet écart est nul). La seconde est sa *liberté* (l'entropie de ses configurations). Le désordre ruine la complexité, et l'ordre complet ruine la liberté. On mesure ce compromis sur le point et sur le point de points, les seuls agrégats qui voient l'ordre du vide (ceux de six cent quarante-huit grains et plus y sont aveugles). Ce choix a été fait après coup (une première règle, écrite d'avance avec quatre agrégats, plaçait J à 0,358), puis justifié par la géométrie seule. La version longue le classe comme une hypothèse forte. Le compromis situe J environ 1,7 % au-dessus du seuil, à $0{,}3454 \pm 0{,}0005$ sur les petits réseaux et à $0{,}3458 \pm 0{,}0003$ sur les grands. Mais le maximum est plat, de sorte que la durabilité fixe une zone pour J et pas sa valeur. Les masses demandent $J \simeq 0{,}3451$ à 0,3455, au bord inférieur de la zone, à environ deux erreurs sous la valeur des grands réseaux. C'est une première assiette plate, au sens de l'introduction.

Proposition 27 (Le mode propre du réseau ; calculé)**.** *Dans le réseau désordonné, sans forme imposée, le spectre des fluctuations de la paire hiérarchique n'a qu'un pic, au quart de la zone de Brillouin dans les trois directions. Le mode mou correspondant fait tourner la paire hiérarchique d'une patte à chaque maille (de* 01 *à* 03*, puis à* 23 *et à* 12*), et la ramène au départ après quatre mailles. Ce mode est unique et non dégénéré. Le réseau ne porte donc pas encore de classes de modes.*

Cette période contraint les formes. Les calculs montrent qu'un volume refermé sur lui-même doit contenir un nombre entier de périodes (sinon le vide ne s'ordonne plus), et au moins deux (sinon le vide change de phase). La plus petite épaisseur fermée que le vide tolère est donc de deux périodes, soit huit mailles.

La conduite des simulations. On a suivi trois règles. D'abord, les règles de lecture (les règles qui identifient une grandeur du modèle à une grandeur mesurée) et les critères de décision ont en général été écrits avant le calcul qu'ils commandent (la version longue [20] signale les exceptions). Ensuite, les résultats obtenus sur de petits réseaux ont été refaits sur de grands réseaux, jusqu'à 82 944 grains, et plusieurs ont alors été abandonnés. Enfin, huit contrôles indépendants ont refait les calculs avec des codes récrits, dont une reconstruction complète du réseau à partir du seul texte. Les erreurs relevées ont été corrigées.

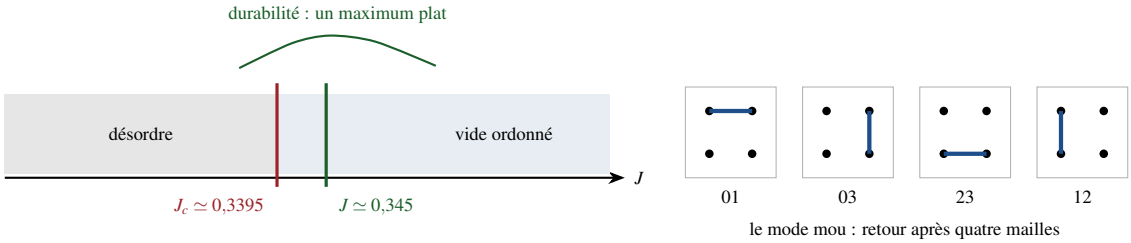


Figure 10: À gauche, le couplage J, avec le seuil de l'ordre, la valeur que demandent les masses et la durabilité, au maximum plat. À droite, le mode propre du réseau désordonné. La paire hiérarchique (en bleu) avance d'une patte par maille et revient au départ après quatre mailles.

10 Ce que le point offre à la matière

Cette section fait un emprunt au niveau de la matière, et elle le déclare. L'acte de ce niveau est la clôture d'une configuration (tableau 2). Sa forme élémentaire est un grain qui porte une patte de plus qu'il ne peut en refermer. Cet acte n'est pas accompli ici. On pose seulement un tel objet, et l'on demande ce que le vide de ce niveau (en particulier son point) lui fait. L'emprunt est permis au sens de l'introduction, car le calcul n'utilise que l'arène, le vide et la patte supplémentaire.

Trois familles, trois organisations d'un point. Dans ce modèle, une particule occupe un point (un agrégat de vingt-quatre grains, qui a des propriétés propres), et pas un grain. Sa famille se lit comme l'organisation du point qui la porte. Un point dont les vingt-quatre grains sont dans l'organisation p porte donc la famille p. La masse de cette famille se lit sur le prix de l'organisation dans le vide (règle de lecture) :

$$m_p \;\propto\; e^{-F_p}, \tag{2}$$

où F_p est l'énergie libre mesurée par la simulation. La famille du vide, a (la jumelle que le vide a choisie), ne coûte rien, donc elle est la plus lourde (la troisième génération). La jumelle s coûte un peu plus, et l'organisation longue l davantage. Elles donnent la deuxième et la première génération. Le vide est ordonné à longue portée, donc partout le même. C'est ce qui, dans le modèle, donne la même masse à toutes les particules d'une espèce.

L'échelle d'intégration est décisive. Sur un seul grain, la hiérarchie des trois générations a la bonne forme, mais une échelle trois à quatre fois trop faible en logarithme. Sur le point, elle devient $1 : \frac{1}{12} : \frac{1}{250}$, pour $1 : \frac{1}{30} : \frac{1}{1900}$ observé en moyenne pour les quarks d et les leptons. Le point donne donc le bon ordre de grandeur en logarithme (environ les trois quarts de la hiérarchie observée), sans autre réglage que celui de J. C'est l'escalier de la section 6. La famille prend son échelle à l'échelon du réseau, et pas encore à l'échelon zéro (le grain isolé).

Proposition 28 (Cinq états, et leur décomposition au point ; démontré)**.** *Cinq pattes de spin un demi ne peuvent pas se refermer en un état sans spin. Leur plus petit spin total est un demi, et il apparaît cinq fois. Ces cinq façons forment un espace M de cinq états. La symétrie complète du point réalise les permutations des quatre pattes du grain, sous lesquelles M se décompose en un triplet et un doublet irréductibles, $\mathbf{3}+\mathbf{2}$. Les pattes elles-mêmes se répartissent en $3+1+1$. La décomposition est donc portée par les états, et non par les pattes.*

Proposition 29 (La couleur est une propriété du point ; calculé)**.** *Chaque point du vide est invariant sous un groupe d'ordre vingt-quatre (grains et paires hiérarchiques compris), dont douze éléments renversent l'orientation. C'est le groupe du tétraèdre, $T_d \simeq S_4$. Un grain isolé ne voit que deux échanges de pattes, qui ne protègent aucune multiplicité (toutes leurs représentations irréductibles sont de dimension un). Les rotations du point seules ($T \simeq A_4$, sans les renversements) couperaient le doublet. Dans le vide fluctuant, aucun des $3{,}2 \times 10^5$ points uniformes examinés ne perd cette symétrie.*

Le triplet et le doublet (lus comme la couleur et l'isospin) sont donc protégés ensemble au point, et pas au grain. La symétrie finie S_4 protège une décomposition compatible avec $U(3) \times U(2)$. Ce groupe contient le groupe de jauge du Modèle standard, $S(U(3) \times U(2)) \simeq (SU(3) \times SU(2) \times U(1))/\mathbb{Z}_6$, avec un facteur $U(1)$ de plus. Mais S_4 n'est aucun de ces groupes.

Postulat 30 (Les modes ; posé)**.** *Les cinq états de M sont lus comme cinq modes fermioniques, chacun occupé ou vide.*

Proposition 31 (Une génération ; démontré sous le postulat)**.** *L'espace des occupations des cinq modes compte trente-deux états. Les seize états qui ont un nombre pair de modes occupés forment le $\mathbf{16}$ de $SO(10)$. Deux modes occupés donnent le $\mathbf{10}$, qui contient le doublet de quarks, l'antiquark u et le positon. Quatre donnent le $\overline{\mathbf{5}}$, qui contient l'antiquark d et le doublet de leptons. Sans mode occupé, on obtient l'état neutre, identifié au neutrino droit. Les opérations à deux modes engendrent $\mathfrak{so}(10)$. Le centre de $\mathrm{Spin}(10)$ est $\mathbb{Z}_4$, et son générateur vaut $+i$ sur le $\mathbf{16}$ et $-i$ sur son conjugué.*

À un facteur près, le seul générateur de trace nulle qui commute avec les symétries du triplet et du doublet est $\mathrm{diag}(2,2,2,-3,-3)$. L'hypercharge est donc imposée (à son facteur près), et pas choisie. Dès que le doublet de leptons contient un état neutre, toutes les charges d'une génération s'en déduisent, et le rapport $Q_d/Q_e = \frac{1}{3}$ est lui aussi imposé.

Le centre $\mathbb{Z}_4$ retrouve l'unité imaginaire que le substrat tirait de son cycle. En effet, son générateur est la demi-phase commune des cinq modes, sur laquelle se transporte une phase portée en commun par les cinq pattes. Les secteurs **16** et $\overline{\mathbf{16}}$ diffèrent par une chiralité, et le verrou achiral interdit de les départager. Le vide porte donc les deux secteurs sans les différencier, et nommer l'un matière et l'autre antimatière est une convention. Le choix de $\pm i$ au niveau suivant ne la fixe pas, et la conjugaison de charge qui échange les deux secteurs appartient au niveau de la matière. Enfin, le groupe engendré est simple et contient la couleur et les facteurs électrofaibles. La grande unification n'est donc pas interdite à ce niveau. Elle se lit sur les modes d'un nœud.

Un générateur porté par quatre anneaux. Prenons un point *a* ou *s* dont les vingt-quatre grains sont accordés. Leurs liens réciproques se referment alors à l'intérieur du point en quatre anneaux de six grains, le long des quatre diagonales d'un cube. La symétrie du point les permute selon $\mathbf{4} = \mathbf{1} + \mathbf{3}$. À un facteur près, un seul générateur de trace nulle commute avec cette symétrie. Il vaut -1 sur le singulet et $+\frac{1}{3}$ sur chaque état du triplet (démontré). On l'identifie à la charge $B-L$ (c'est une identification, pas une déduction). Le rapport de ses deux valeurs offre alors une lecture du facteur trois qui sépare les quarks *d* et les leptons des deux premières générations, masses rapportées à celle de la troisième ($m_s/m_b \simeq \frac{1}{3}\, m_\mu/m_\tau$ et $m_d/m_b \simeq 3\, m_e/m_\tau$), soit $d - e = \pm \ln 3$ en logarithme. C'est le motif connu depuis Georgi et Jarlskog [21].

Tableau 4: Les structures du niveau et leur statut.

structure	ce qui la porte	statut
dimension trois	commutateurs de deux bits : $\mathfrak{su}(2)$	démontré
superposition	l'enveloppe linéaire	posé (l'acte)
lecture à travers une face	inversion dans $\mathbb{Z}_4$	dérivé
vide plat	arène de disphénoïdes, déficits nuls	démontré
bipartition	cycles pairs de l'arène	démontré
seuil et vide ordonné	$J_c = 0{,}3395 \pm 0{,}0005$	calculé
zone du couplage	durabilité, maximum plat	calculé
mode propre de période quatre	spectre du réseau désordonné	calculé
trois familles	trois organisations du point	calculé (échelle)
matière	une patte de plus	emprunté au niveau de la matière
$\mathbf{3}+\mathbf{2}$ au point	cinq états sous S_4	démontré, calculé
seize états, charges en tiers	cinq modes fermioniques	démontré sous le postulat des modes
centre $\mathbb{Z}_4$	demi-phase commune des modes	démontré sous le postulat des modes
$B-L$	générateur des quatre anneaux	démontré ; identification posée
chiralité	absente du niveau	renvoyée à N_1

11 Plages et valeurs

Définition. Le niveau laisse deux choix ouverts. Le premier est le couplage J, que la durabilité confine à une zone sans le fixer. Le second est le volume où une particule lit le vide. C'est un volume fermé, où le vide se referme sur lui-même (et pas le vide infini), et le niveau ne le désigne pas. Nous appelons *plage* d'une grandeur l'intervalle que parcourt le modèle quand seuls ces deux choix varient. On a pris vingt-quatre volumes fermés de 3 072 à 82 944 grains, et J entre 0,3451 et 0,3455, avec les règles de lecture et le modèle de base fixes. La plage mesure donc la latitude que laisse le niveau, pas toutes les incertitudes du modèle. La définition a été écrite avant le calcul. Le tableau 5 et la figure 11 donnent, pour chaque grandeur, la plage entière et sa bande centrale (les lectures situées entre 16 et 84 % de leur distribution).

Les dix-huit grandeurs tombent dans leur plage, à l'erreur de mesure près, et dix dans la bande centrale. Pour quinze, la valeur centrale mesurée est dans la plage. Pour les trois autres (m_t/m_u, m_b/m_d et l'écart $d-e$ de la première génération), elle dépasse le haut de la plage de moins d'une erreur de mesure. Ces grandeurs ne sont pas indépendantes (section 14.2), donc elles ne valent pas dix-huit épreuves. Les plages n'ont pas non plus toutes le même poids. Certaines sont larges (de quarante-cinq à plus de soixante-dix erreurs expérimentales pour θ_{13}, $|V_{cb}|$ et m_t/m_c) et contraignent peu. Les plus étroites font moins de cinq erreurs (m_t/m_u, écarts $d-e$, γ, $|V_{ub}|$). Ce sont les plus informatives, et toutes contiennent la valeur mesurée, compte tenu de son erreur. Une seule grandeur est hors plage, la somme des masses des neutrinos. Le modèle la place entre 0,066 et 0,086 eV (la masse du neutrino le plus lourd, 0,052 à 0,063 eV, multipliée par le rapport de la somme à cette masse, calculé sur la plage). C'est au-dessus de la borne cosmologique actuelle de 0,064 eV (à 95 %), obtenue dans le modèle cosmologique standard [26]. Hors de ce modèle, la borne est plus lâche (environ 0,16 eV si l'énergie sombre varie).

Le sens des corrections. Pour six grandeurs, toutes des hiérarchies de masse ou un écart qui en dépend, la valeur observée est au-dessus de la bande centrale. Les hiérarchies observées sont donc un peu plus raides que la valeur centrale du modèle. Si la lecture de l'introduction est juste, les interactions des niveaux suivants doivent raidir les hiérarchies de masse et

Tableau 5: Plages du niveau pour les dix-huit grandeurs calculées, et somme des masses des neutrinos. Les rapports de masse sont donnés en logarithme. La position est donnée par rapport à la bande centrale, sauf pour trois grandeurs qui dépassent le haut de la plage de moins d'une erreur. Les valeurs observées sont ramenées à l'échelle du boson Z [22, 23, 24, 25, 26].

grandeur	plage de N_0	bande centrale	observé	position
$\ln(m_t/m_c)$	3,67 – 5,73	4,92 – 5,62	$5{,}604 \pm 0{,}028$	dans la bande
$\ln(m_t/m_u)$	11,38 – 11,69	11,51 – 11,60	$11{,}83 \pm 0{,}17$	au-dessus de la plage (<1 erreur)
$\ln(m_b/m_s)$	3,05 – 3,99	3,59 – 3,93	$3{,}978 \pm 0{,}087$	au-dessus de la bande
$\ln(m_b/m_d)$	6,28 – 6,91	6,73 – 6,87	$6{,}969 \pm 0{,}072$	au-dessus de la plage (<1 erreur)
$\ln(m_\tau/m_\mu)$	1,74 – 2,88	2,43 – 2,82	2,832	au-dessus de la bande
$\ln(m_\tau/m_e)$	7,75 – 8,20	8,06 – 8,16	8,183	au-dessus de la bande
$d-e$ (2^{e})	1,11 – 1,31	1,12 – 1,16	$1{,}146 \pm 0{,}087$	dans la bande
$d-e$ (1^{re})	$-1{,}48$ – $-1{,}28$	$-1{,}33$ – $-1{,}29$	$-1{,}214 \pm 0{,}072$	au-dessus de la plage (<1 erreur)
$\lvert V_{us}\rvert$	0,192 – 0,229	0,202 – 0,226	$0{,}2245 \pm 0{,}0008$	dans la bande
$\lvert V_{cb}\rvert$	0,037 – 0,113	0,039 – 0,057	$0{,}0410 \pm 0{,}0014$	dans la bande
$\lvert V_{ub}\rvert$	0,0036 – 0,0046	0,0037 – 0,0039	$0{,}00382 \pm 0{,}00024$	dans la bande
γ	58,7° – 67,2°	66,4° – 67,1°	$65{,}9° \pm 3{,}4°$	au bord inférieur
$\sin 2\beta$	0,38 – 0,78	0,60 – 0,76	$0{,}708 \pm 0{,}011$	dans la bande
$\lvert J_{\text{CKM}}\rvert$	$2{,}7 - 8{,}5 \times 10^{-5}$	$3{,}0 - 4{,}0 \times 10^{-5}$	$3{,}08 \times 10^{-5}$	dans la bande
θ_{12}	31,4° – 36,2°	33,0° – 34,8°	$33{,}7° \pm 0{,}7°$	dans la bande
θ_{23}	41,8° – 49,6°	43,2° – 44,8°	$43{,}3° \pm 0{,}9°$	dans la bande
θ_{13}	6,8° – 11,9°	8,0° – 9,3°	$8{,}56° \pm 0{,}11°$	dans la bande
$\Delta m^2_{21}/\Delta m^2_{31}$	0,019 – 0,038	0,030 – 0,036	$0{,}0298 \pm 0{,}0008$	au bord inférieur
$\sum m_\nu$	0,066 – 0,086 eV	—	$<0{,}064$ eV (cosmologie)	hors plage

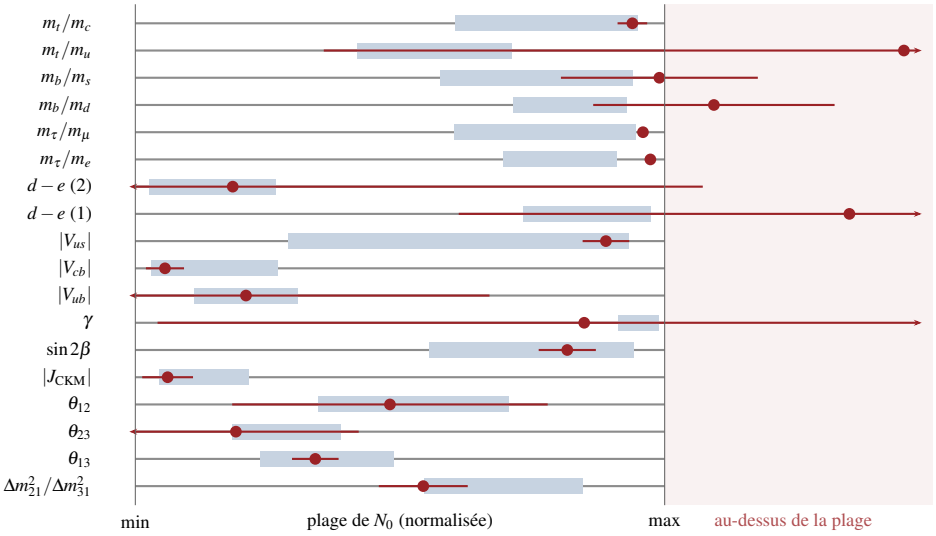


Figure 11: Position de chaque valeur mesurée dans la plage du niveau. Le point rouge est la valeur mesurée, avec une barre de ± 2 erreurs. Le trait gris est la plage, normalisée de son minimum à son maximum. La zone bleue est la bande centrale (lectures situées entre 16 et 84 % de leur distribution). La zone rosée, à droite, est au-dessus de la plage. Une flèche indique que la barre d'erreur continue au-delà du cadre. Pour six grandeurs, la valeur mesurée est à droite de la bande centrale. Ce sont des hiérarchies de masse, ou un écart qui dépend de ces hiérarchies. Certaines plages de masse sont étroites (celle de m_t/m_u ne couvre que 1,8 erreur de mesure). Un petit écart réel paraît donc grand sur ce dessin (par exemple, m_t/m_u dépasse le haut de sa plage de 0,14 en logarithme, soit moins d'une erreur de mesure). Calcul : `C_plages.py`.

abaisser l'échelle des neutrinos. Ce sens est annoncé ici d'avance, comme l'exige la deuxième des trois conditions de l'introduction. Des corrections de sens contraire mettraient le modèle en difficulté.

Toute la zone de durabilité. Le tableau fait varier J de 0,3451 à 0,3455, là où les entrées des masses ont été mesurées. Or la zone de durabilité va de 0,3449 à 0,3461. On a donc refait le calcul sur toute la zone, avec les mêmes vingt-quatre volumes et un critère écrit avant le calcul. Deux des trois valeurs centrales mesurées qui dépassaient leur plage y entrent (m_t/m_u et m_b/m_d). L'écart $d-e$ de la première génération reste au-dessus, de moins d'une erreur. Mais ces deux entrées viennent seulement du bord haut de la zone ($J = 0{,}3461$), et d'un seul volume (sans ce point, aucune des trois n'entre). Les plages s'élargissent aussi (celle de m_t/m_u passe de 1,8 à 3,4 erreurs), donc elles contraignent moins. Les bandes centrales bougent peu, et le sens de l'écart ne change pas. Sur toute la zone, la somme des masses des neutrinos va de 0,065 à 0,093 eV, toujours au-dessus de la borne, et le signe relatif de la violation de CP ne change pas. La latitude que ce niveau laisse sur J est donc épuisée sur ce point. Le tableau garde l'intervalle mesuré, dont les plages, plus étroites, sont plus informatives. Les écarts qui restent sont tous dans la première génération, là où la lecture de ce niveau est la moins précise. En effet, la première génération ne se lit pas directement. Elle naît de la famille intermédiaire et cumule les approximations

de la lecture des liens entre familles, écrite au premier ordre. L'écart entre ce premier ordre et l'ordre suivant est le plus grand pour le quark d et l'électron (0,23 pour m_b/m_d et 0,18 pour m_τ/m_e, en logarithme). Pour m_t/m_u, il ne vaut que 0,05, ce qui n'explique qu'une partie de l'écart (0,14).

La cohérence du niveau. Reste à savoir jusqu'où une seule lecture, à l'intérieur des plages, rend compte de toutes les grandeurs à la fois. Si l'on mesure toutes les entrées ensemble, sur de grands réseaux et au même J, l'accord est imparfait, avec $\chi^2 = 61$ pour dix-huit grandeurs. Trois grandeurs s'écartent de trois à cinq erreurs ($\sin 2\beta$, le rapport des écarts de masse des neutrinos et m_τ/m_e). L'écart de $\sin 2\beta$ provient d'un $|V_{cb}|$ trop bas de six pour cent. Si l'on déclare ensuite comme incertitude la précision de la lecture à l'ordre dominant (0,05 sur les énergies libres), choix fait en connaissant l'écart, le χ^2 revient à 25. Enfin, si l'on lit tout le modèle dans le cube de huit mailles de côté (un volume fermé de deux périodes dans chaque direction, 3 072 grains), on obtient $\chi^2 = 24$, et aucune grandeur ne s'écarte de plus de trois erreurs. Ce chiffre provient d'une réplication sur vingt-quatre graines indépendantes, avec une règle de décision écrite d'avance. Ce volume a été retenu parmi une trentaine, et la raison de ce choix n'est pas encore établie. Ces nombres mesurent la cohérence d'une lecture du niveau. Ce ne sont pas des prédictions, et nous ne les divisons pas par un nombre de degrés de liberté (section 14.2).

Les neutrinos, et le couplage de jauge. Le neutrino droit est l'état neutre, sans famille. Il n'est attaché à aucune des trois organisations du point, donc ses trois masses de Majorana sont égales. Son lien avec le neutrino gauche ne porte que la suppression du grain, plus faible que celle des quarks. Il en découle, sans règle ajoutée, un ordre normal des masses des neutrinos pour toutes les lectures, et des mélanges grands, de trente à quarante-cinq degrés (ceux des quarks ne font que quelques degrés). On ajoute ensuite des règles de lecture explicites, selon lesquelles le neutrino est un résidu émis par le système, qui ne garde rien de l'identité du système, et que le vide reçoit sans tri. Sous ces règles, les trois angles approchent les valeurs observées (33,8°, 43,6° et 8,97° pour 33,7°, 43,3° et 8,56°). Le dernier, le plus éloigné, dépasse de 0,4°, soit près de quatre erreurs expérimentales, mais moins que l'incertitude du modèle (0,6°). La valeur observée de θ_{23} dépend encore de l'analyse (43,3° avec les données atmosphériques de Super-Kamiokande, 48,5° sans elles [24]). La phase de violation de CP vaut 347°, dans l'intervalle actuel à trois écarts types, mais loin du meilleur ajustement (177° à 212° selon l'analyse). La violation de CP des leptons est de signe opposé à celle des quarks ($J_{\mathrm{CP}} \simeq -0{,}008$ pour $J_{\mathrm{CKM}} > 0$). Sur toute la plage, ce signe relatif ne change jamais, et δ_{CP} reste entre 345° et 349°. Le signe global est une convention (il dépend de ce qu'on nomme matière et antimatière). C'est la mesure côté quarks ($J_{\mathrm{CKM}} > 0$) qui le fixe, et non le choix de $\pm i$ au niveau suivant (section 15). Ce que le modèle prédit est le signe relatif.

Pour les forces, on applique la règle d'accord (celle qui compte les liens accordés) aux cycles de grains. Lue au premier ordre sur les modes transportés, elle redonne l'action de Wilson [27], écrite dans la représentation à seize états. Le point d'équilibre de la transition de jauge, calculé en lecture euclidienne, fixe le couplage de jauge à l'échelle du grain à $1/\alpha_0 = 71{,}5 \pm 0{,}3$, sans ajustement de J. Ce calcul a été refait avec un code nouveau, jusqu'au réseau $6^3 \times 4$, et il ne dépend presque pas de la taille ni du nombre de couches de temps (la première version donnait 75 ± 3, avec une normalisation de l'énergie libre ordonnée que le nouveau code ne reproduit pas). Les couplages mesurés demandent 80 ± 10. Cette cible passe par une chaîne d'unification posée (une des règles de lecture) et par une conversion vers le schéma du réseau, qui porte l'essentiel de son incertitude. Sur cette chaîne, les trois couplages mesurés se rejoignent vers $1{,}5 \times 10^{16}$ GeV.

12 Ce que porte le réseau

Proposition 32 (La décohérence : le mécanisme, non le sens)**.** *Le produit fibré avec l'environnement fait décroître les termes croisés comme une suite géométrique du nombre de faces partagées, sans aucune dynamique. Ce niveau fournit donc le mécanisme. Le sens de l'enregistrement (lequel des partenaires garde la trace de l'autre) appartient au niveau suivant.*

Chaque face partagée avec l'environnement réduit le terme croisé entre deux alternatives d'un facteur $r < 1$ (le recouvrement des données de l'environnement sur cette face). Après N faces partagées, le terme croisé a décru comme r^N. Avec une valeur illustrative, $r = 0{,}9$, il vaut 0,35 après dix faces et $2{,}7 \times 10^{-5}$ après cent. Ce qui compte est donc que l'environnement distingue les alternatives, plus que sa taille. La superposition n'est pas détruite. Elle est répartie sur des partenaires qu'on ne peut pas, en pratique, rassembler.

Le sens de l'enregistrement demanderait une orientation, donc le bit du niveau suivant, qui oriente aussi l'axe d'ordre. Le sens de l'enregistrement et la flèche du temps relèvent donc d'une seule dette. Une autre question reste hors de portée, celle de savoir pourquoi un seul des résultats possibles est obtenu. Ce niveau ne la traite pas, et l'article ne prétend pas que le niveau suivant la règle.

12.1 Trois « trois », à ne pas confondre

Le nombre trois apparaît à des endroits de nature différente. Les trois dimensions de l'espace sont la dimension d'une algèbre. Les trois appariements d'un grain sont une cardinalité, $(4-1)!! = 3$, et deviennent les trois familles quand un point les porte. Le trois du triplet de couleur est la dimension d'une représentation irréductible de la symétrie du point, qui agit sur les cinq états d'un nœud portant une patte de plus. Le canal de recouplage de spin total un, de dimension trois lui aussi (section 8.1), porte la représentation standard des permutations des quatre pattes, et ni les familles ni la couleur.

Aucune dérivation de l'article ne fait passer de l'un de ces nombres aux autres, qui ne sont pas de même espèce. Ils

coïncident à la valence quatre. C'est une régularité arithmétique vérifiée, mais pas une explication.

13 Ce que ce cadre emprunte, et ce qui n'est pas un manque

13.1 Un emprunt déclaré

La règle de Born est reconstruite par la voie de Busch [28], plus courte que celle de Gleason [29]. Cette voie demande une hypothèse d'additivité sur les effets (les mesures généralisées, plus larges que les projecteurs). Elle a ici un avantage, car elle vaut aussi en dimension deux (celle de l'espace des états d'un grain isolé), où le théorème de Gleason ne s'applique pas. L'hypothèse d'additivité reste importée. La règle de Born est donc dérivée sous condition. C'est le seul énoncé de cette section qui a ce statut.

13.2 Trois questions qui ne sont pas des manques

La borne de Tsirelson [30] n'est pas un manque. Le foncteur produit une algèbre involutive normée, donc un espace de Hilbert, où cette borne (la valeur $2\sqrt{2}$) est un théorème. Il reste à justifier le cadre (l'acte), pas la borne.

La contextualité de Kochen et Specker [31] n'est pas non plus un manque. Elle exige une dimension au moins égale à trois. Elle n'a donc pas d'objet sur un grain isolé (dimension deux), et le théorème s'applique dès deux grains recollés (leur espace d'états a plus de deux dimensions). C'est un théorème de géométrie hilbertienne, qu'il n'y a ni à dériver ni à exclure. Son analyse explicite sur les assemblages reste à faire (section 16.3).

La tension entre la voie de Busch et le théorème de Kochen et Specker n'est qu'apparente, car les deux non-contextualités diffèrent. Celle que suppose Busch porte sur les probabilités (la probabilité d'un effet ne dépend pas des effets mesurés avec lui). Celle qu'interdisent Kochen et Specker porte sur les valeurs (aucune assignation déterministe des valeurs n'est non contextuelle). La mécanique quantique satisfait la première et viole la seconde. Sur un seul grain, la proposition 5 montre un fait plus faible, l'incompatibilité (aucun état n'a à la fois un canal défini et un volume défini). Ce n'est pas encore de la contextualité, car en dimension deux un modèle à valeurs cachées non contextuel existe [31].

Enfin, l'étalonnage du spectre de l'aire est une unité, pas un manque. Trois grandeurs de base indépendantes (longueur, durée, masse) donnent trois constantes dimensionnées (c, $\hbar$, G). Leur valeur numérique dépend du choix des unités, de sorte qu'aucune théorie ne la dérive. Une fois c et $\hbar$ fixées, la constante de la gravitation fixe l'unité de longueur (la longueur de Planck), qui étalonne le spectre de l'aire.

13.3 Un problème ouvert, dont le coût se chiffre

Proposition 33 (L'écart au continu)**.** *Pour un champ scalaire sur le graphe des grains, le carré ω^2 de la fréquence ne dépend pas de la direction jusqu'au quatrième ordre en k inclus. L'écart relatif de ω^2 entre les directions* $[100]$ *et* $[111]$ *vaut $-0{,}0025\,(k\ell)^4$ (où ℓ est la distance entre grains voisins). Sur le réseau diamant, le même calcul donne un écart relatif dès le second ordre, $+0{,}037\,(k\ell)^2$. Si l'on identifie ℓ à la longueur de Planck, l'écart sur la sonde la plus énergétique jamais observée (un rayon cosmique d'environ 3×10^{20} eV) est de l'ordre de 10^{-33}.*

La limite continue n'est pas construite, mais l'un de ses effets attendus, l'anisotropie de la propagation, est chiffré. Aucune expérience envisageable n'approche ce seuil.

Proposition 34 (Le plancher d'information ne donne pas d'énergie du vide)**.** *Une face partagée porte un bit, ni plus ni moins. L'arène fixe la densité des faces (vingt-quatre par maille cubique, pour douze grains). Le calcul naïf donnerait une densité d'énergie supérieure d'environ cent vingt ordres de grandeur à la valeur observée. Ce calcul est fautif, car la relation de Landauer [32] fait payer l'effacement d'un bit, pas son stockage, et ce plancher est une densité d'information conservée. La conversion en énergie n'a donc pas lieu, et ce cadre n'hérite pas de cette catastrophe par cette voie.*

Le problème habituel de la constante cosmologique (l'énergie de point zéro des champs) reste entier. Il se pose aux niveaux qui ont des champs et une énergie, et ce niveau n'en dit rien.

14 Ce que contrôlent les comptes, et ce qu'ont choisi les lectures

14.1 Les comptes

Plusieurs énoncés se ramènent à des comptes finis, que le tableau ci-dessous rassemble. Chaque compte se vérifie sans interprétation ni expérience. Ce qu'on en tire (la seconde partie de chaque ligne) dépend en revanche des lectures du modèle.

La plupart de ces comptes se refont sur un grain ou deux. Les autres sont des faits d'algèbre ou de cristallographie. Un programme fondationnel gagne à appuyer ses énoncés sur des grandeurs recalculables plutôt que sur des analogies, car ses erreurs deviennent alors détectables.

Le travail peut ainsi être réfuté de trois façons, en refaisant ces comptes, en relançant les simulations avec les codes publiés, ou par les conditions de la section 16, qu'un fait du monde réfuterait.

14.2 Ce qu'ont choisi les lectures numériques, et ce qui a échoué

Un modèle qui expliquerait autant de nombres qu'il a fait de choix n'expliquerait rien. Nous comptons donc les choix de la partie numérique. Un relecteur indépendant, qui n'avait pas suivi le travail, a relu ce compte, et nous retenons ses

Tableau 6: Les comptes dont dépendent les résultats, et ce que chacun décide.

ce qui est compté	résultat, et ce qu'il décide
dimension de l'espace des entrelaceurs	deux à la valence quatre, cinq à la valence six ; seule la première porte exactement un bit
nombre d'appariements	$(v-1)!!$, soit trois à la valence quatre ; ce sont les organisations, que le point porte comme familles
angles entre appariements	120°, normes égales, somme nulle ; c'est le diagramme de poids
dimension du commutant	deux ; c'est le nombre d'observables invariantes d'un grain
spectre du volume	$\{-\sqrt{3}/4, +\sqrt{3}/4\}$, de trace nulle, antisymétrique dans la base où l'aire du canal est diagonale ; d'où la non-commutation avec l'aire
entropie d'une face partagée	exactement $\ln 2$; c'est l'unité du capital
dimension des entrelaceurs de deux grains	$2 \times 2 = 4$, pour deux grains séparés comme pour deux grains recollés le long d'une face de spin un demi ; l'espace invariant des six pattes libres en a cinq, mais le cinquième état demande une face de spin $\frac{3}{2}$
états d'une perforation de spin $\frac{1}{2}$	deux, $m = \pm\frac{1}{2}$, pour le poids 2 comme pour le poids $2j+1$; c'est l'unité du comptage ($\ln 2$ par face), pas la valeur de γ
angles dièdres du disphénoïde	$4 \times 90^\circ = 6 \times 60^\circ = 360^\circ$; les déficits sont nuls, donc le vide est plat
plus courts cycles de l'arène	quatre et six grains ; tous les cycles sont pairs, d'où la bipartition
opérations qui échangent les sous-réseaux	vingt-quatre sur quarante-huit, douze propres et douze impropres ; l'échange n'est donc pas une affaire de parité
faces par maille cubique	$12 \times 4/2 = 24$; c'est la densité de bits du vide
cinq états d'un nœud sous S_4	$\mathbf{3}+\mathbf{2}$, irréductibles (les pattes donnent $3+1+1$) ; la couleur vit donc sur les états
quatre anneaux d'un point sous S_4	$\mathbf{1}+\mathbf{3}$, avec un seul générateur commutant de trace nulle (à un facteur près), $(-1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$; il est identifié à $B-L$

conclusions.

Outre le couplage unique, les grandeurs particulières demandent quinze règles de lecture. Elles disent, par exemple, comment la charge $B-L$ se déclenche dans un défaut, comment la famille légère hérite de la famille intermédiaire, ou comment le neutrino est émis et reçu. Huit ont été fixées avant le calcul qu'elles commandent, ou reprennent des postulats d'unification. Sept ont été formulées en connaissant la grandeur visée, ou après un diagnostic. S'y ajoutent des choix de lecture (le volume où l'on lit le vide, l'incertitude déclarée sur la lecture à l'ordre dominant, la phase du lien de Cabibbo, la comparaison à l'échelle du boson Z, et de petits planchers d'incertitude du modèle sur cinq grandeurs).

Les dix-huit grandeurs confrontées ne sont pas indépendantes. Deux sont des différences d'autres lignes de masse, et deux découlent des éléments de mélange. Il reste donc environ quatorze grandeurs indépendantes. Selon notre convention, un résultat prend le statut le plus faible de ses sources. Or toutes les grandeurs de masse et de mélange passent par la règle qui fixe la zone de J, formulée en connaissant les masses. Ces grandeurs sont donc des *accords*, pas des prédictions. Le contenu prédictif de la partie numérique tient dans les structures de la section 10, l'ordre des masses des neutrinos, et deux nombres que l'expérience n'a pas encore fixés (la somme de ces masses et le signe de la violation de CP des leptons par rapport à celle des quarks).

Tableau 7: Les choix de la partie numérique.

choix	nombre et nature
paramètre réglé	un, le couplage J, dans la zone de durabilité
actes et postulats	l'enveloppe linéaire (l'acte) ; la patte supplémentaire (empruntée au niveau de la matière) ; le postulat des modes
règles de lecture fixées d'avance	huit (dont une qui reprend deux postulats d'unification)
règles formulées en connaissant la cible	sept
choix de lecture	volume fermé ; incertitude de lecture ($\pm 0{,}05$ sur les énergies libres) ; phase de Cabibbo ; échelle de comparaison ; planchers d'incertitude
grandeurs indépendantes confrontées	environ quatorze sur dix-huit

Plusieurs voies ont échoué. D'abord, le mécanisme de bascule de type I, appliqué tel quel, manque l'échelle des neutrinos d'un facteur cinq mille à vingt-quatre mille. Sous cette forme, il est donc réfuté dans ce modèle. Parmi les voies essayées, seule une lecture par le rejet sans contrepartie, posée comme règle, approche la valeur observée. Ensuite, la règle de durabilité, prise à sa propre valeur de J, donne $\chi^2 = 978$, d'où une zone et non une valeur. Les volumes allongés, qu'on croyait favorables aux quarks, échouent aussi, car les points de la famille intermédiaire s'y rassemblent en bouchons, dont la part croît avec la longueur. Une explication par la moyenne des flux aux frontières a été abandonnée, car ces moyennes ne dépendent pas de la forme du volume. Enfin, nous espérions que le réseau contiendrait déjà plusieurs classes de modes, d'où découleraient des classes de particules. Il n'en contient qu'une. La plupart de ces épreuves avaient leurs règles de décision écrites avant le calcul (la version longue en donne le détail [20]).

15 La dette : sept manques, un seul choix nouveau

Sept structures manquent à ce niveau. Chaque absence découle d'un résultat du présent article, et pas d'un vœu.

L'article prend un risque, car il soutient que ces sept manques dépendent d'un seul choix nouveau. Le corps des nombres complexes est déjà présent. En effet, l'algèbre réelle du groupe cyclique d'ordre quatre se décompose en $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{C}$ (théorème de Maschke), et les deux racines $\pm i$ y forment le bloc complexe. La troisième étape du foncteur (l'enveloppe

involutive normée, une C^*-algèbre) utilise donc un corps qui est déjà là. Il manque seulement le choix de l'une des deux racines de moins un. À ce niveau, les deux racines sont interchangeables, car la conjugaison est une symétrie non brisée.

Tableau 8: Les sept structures manquantes. Pour chacune, le résultat dont découle son absence.

ce qui manque	pourquoi, et d'où cela découle
l'orientation du temps	toute grandeur du niveau est paire sous renversement du temps (théorème 14)
la signature	l'espace des formes invariantes est un plan (théorème 13)
les changements de référentiel	aucune transformation du niveau ne mélange les deux blocs de la décomposition (proposition 6)
le cône, et la causalité	sans signature lorentzienne fixée, il n'y a pas de cône de directions nulles (théorème 13)
la dynamique	le générateur temporel s'annule, ce qui est l'énoncé correct pour un niveau sans temps orienté (proposition 16)
la décohérence orientée	l'intrication existe, mais rien ne dit lequel des partenaires enregistre l'autre (proposition 32)
la chiralité de l'espace	les deux états de volume défini sont échangés par la conjugaison, qui n'est pas brisée à ce niveau ; rien ne choisit donc l'un d'eux (proposition 5)

Le niveau suivant lève les sept manques du tableau 8 par un seul choix nouveau, celui de l'unité imaginaire ($\pm i$), avec des acquis du niveau (la réalité des configurations, l'état initial pur, le produit fibré). Aucun manque n'est levé par ce choix seul. Que ce soit le seul remède reste une conjecture, et le niveau suivant la nomme ainsi.

Pour la troisième ligne, les changements de référentiel qui manquent sont les boosts (les rotations sont déjà là). Le choix de $\pm i$ a deux effets distincts. D'abord, des observables symétriques déjà admises deviennent des générateurs ($-i(aP_1 + bP_3)$ sur un grain). C'est la dynamique, et elle ne mélange pas les blocs (section 5). Ensuite, les générateurs antisymétriques des rotations, déjà présents, deviennent des observables. Sur l'espace réel des configurations, la seule réalisation de ces opérateurs est celle des boosts, et ceux-ci mélangent les deux blocs (le calcul donne un mélange nul pour une rotation et non nul pour un boost). Les boosts sont des changements de référentiel, avec la signature et le cône, et pas des générateurs temporels. On dit souvent que le générateur d'un boost est i fois celui d'une rotation. C'est juste dans la représentation spinorielle, mais celle-ci n'a pas les deux blocs. Sur les configurations, un multiple d'une rotation ne mélange rien, et c'est la réalité des configurations qui force le mélange des boosts. Les six premières lignes sont temporelles ou causales. La dernière est spatiale, car le signe du volume est celui de l'orientation du trièdre. Le manque porte donc sur la structure du niveau, et pas seulement sur le temps.

Du côté de la matière, il faut séparer deux choses. D'abord, les secteurs **16** et $\overline{\mathbf{16}}$ sont indifférenciés ici. Les nommer matière et antimatière est une convention, et le choix de $\pm i$ ne la fixe pas (le niveau suivant le dit sans rapport avec l'antimatière, et la conjugaison de charge appartient au niveau de la matière). Le signe global de la violation de CP dépend de ce nommage. C'est la mesure côté quarks ($J_{\mathrm{CKM}} > 0$) qui le fixe. Ce que le modèle prédit est le signe relatif entre leptons et quarks, déjà fixé à ce niveau (section 11). Ensuite, la chiralité du grain (sa main) est sélectionnée au niveau suivant. Le vide de ce niveau porte encore les deux mains.

La forme générale de la dette

Un niveau sépare des objets que le niveau précédent confondait. On en tire une forme générale, qui reste une régularité à vérifier. Chaque niveau doit au suivant un mélangeur de ce qu'il a séparé. Ici, ce mélangeur est fait des boosts (les générateurs des rotations multipliés par i), que le niveau suivant fournit avec les changements de référentiel. Le générateur de la dynamique, lui, ne mélange pas les blocs. Il commute avec les opérations du niveau, et ce qui change est seulement qu'il peut être non nul.

Le mélangeur existe déjà en germe à ce niveau, car les générateurs anti-hermitiens des rotations sont présents. Pourtant, ce niveau ne peut pas s'en servir, car aucune racine n'est choisie au sens de la section 5 (aucun de ces générateurs n'est une observable). Si les passages suivants confirment cette régularité, on pourra anticiper la dette d'un niveau avant de l'avoir construit. Il suffira de regarder ce que le niveau sépare, puis de chercher ce qui, déjà présent, le mélangerait à nouveau.

15.1 Ce qu'ajoute la dette quand on lit la matière sur le vide

La partie numérique ajoute à la dette deux éléments de même forme. Le premier concerne les formes. Le vide porte toutes les formes et toutes les associations de grains, chacune avec son poids, de sorte qu'elles n'existent qu'en puissance. Trois choses ne sont pas des objets de ce niveau (les volumes fermés où se lisent les particules, l'épaisseur de deux périodes retenue pour la lecture, dont le niveau fixe seulement le minimum, la fenêtre étroite où doit tomber le prix d'un point de la famille intermédiaire). Ce sont des sélections, que feront les contraintes des niveaux suivants. C'est pourquoi la meilleure forme a été trouvée par exploration, sans être dérivée. C'est aussi pourquoi la règle de durabilité fixe une zone du couplage, sans fixer sa valeur. Dans cette lecture, cet échec est attendu, et il ne réfute pas le modèle. Ce niveau offre son potentiel, qui est le mode de fluctuation de période quatre (le premier mode à devenir instable). Sur ce mode, les contraintes des niveaux suivants pourraient faire naître des classes d'ondes, puis des classes de particules.

Le second élément concerne les valeurs. Elles se règlent sur l'assiette plate décrite dans l'introduction, par les interactions des particules entre elles et avec leur support. Ces interactions demandent un temps orienté (niveau suivant), et que la matière soit posée sur le vide et que le vide réagisse à sa présence (niveau de la matière). La section 11 donne le sens attendu des corrections (des hiérarchies de masse plus raides et une échelle des neutrinos plus basse). Le sens de la séparation entre triplet et doublet décide lequel des deux, le triplet coloré ou le doublet, est le plus lourd (les théories d'unification demandent un triplet beaucoup plus lourd que le doublet). Il appartient lui aussi au niveau de la matière. La

valeur du paramètre d'Immirzi relève de la même règle, bien qu'elle ne vienne pas de la matière. Elle demande un horizon, donc un temps orienté et une vitesse limite (niveau suivant) et une masse (niveau de la matière). Le niveau n'en fixe que l'unité, le bit par face (section 8.2).

Un exemple : deux grains recollés. Le plus petit assemblage est formé de deux grains qui partagent une face. Il suffit pour voir fonctionner la plupart des mécanismes de la partie cinématique (la version longue [20] les rassemble). Il montre ce qui manque au niveau (l'axe d'ordre est présent mais non orienté, la signature est indéterminée). Il montre aussi ce que le niveau produit sans s'en servir (les sous-réseaux des deux grains, déjà opposés). Ce que l'exemple ne montre pas est de trois sortes. La première est ce que le niveau ne peut pas avoir (la dynamique, et la masse, car la clôture appartient au niveau de la matière). La deuxième demande seulement un assemblage plus grand (la rigidité mécanique, qu'une face partagée de plus établirait). La troisième demande un point (les familles et la protection de la couleur, que vingt-quatre grains portent). Aucun agrandissement ne comblerait la première sorte. La dette tient donc à la structure du niveau, et pas à la taille de l'assemblage.

16 Ce qui réfuterait ce travail, et ce qui reste ouvert

Un modèle fondationnel n'a d'intérêt que s'il peut échouer. Huit conditions suivent. Six portent sur le monde ou sur un calcul (celui de ce niveau, que chacun peut refaire, ou celui que les niveaux suivants devront faire). Deux portent sur des hypothèses. Le modèle ne s'expose réellement que sur les six premières.

16.1 Ce qu'un fait réfuterait

(a) *Un seul cycle impair dans l'assemblage réalisé.* La bipartition disparaîtrait. Avec elle disparaîtraient le sous-réseau d'un grain, donc l'espace interne du doublet électrofaible que le niveau de la matière lit dans ce sous-réseau (proposition 11). La section 10 lit aussi le doublet par un autre chemin, mais l'accord des deux lectures, que le niveau de la matière doit établir, n'aurait plus d'objet. C'est la condition la plus nette du travail, car un seul cycle impair suffit, quel que soit l'endroit où il se trouve.

(b) *Une troisième classe statistique en dimension trois.* La proposition 19 n'admet que deux classes. La topologie interdit aussi les anyons, indépendamment de cette proposition. En effet, dès la dimension trois, le groupe des échanges n'est plus le groupe des tresses mais le groupe symétrique, dont les seules phases d'échange sont $+1$ et -1 (les anyons observés dans des systèmes bidimensionnels ne sont donc pas concernés). La topologie laisse en revanche ouvertes les parastatistiques (des représentations de dimension plus grande de ce groupe), dont le statut physique reste discuté. Une parastatistique réalisée en dimension trois serait une troisième classe, et réfuterait la proposition.

(c) *Un point sans le groupe complet.* Supposons qu'un point uniforme du vide ordonné ne soit pas invariant sous le groupe complet du tétraèdre. Ou supposons que les cinq états d'un nœud se décomposent sous ce groupe autrement qu'en $\mathbf{3}+\mathbf{2}$. Dans les deux cas, la protection de la couleur et de l'isospin tomberait (propositions 28 et 29).

(d) *Une grandeur durablement hors de sa plage.* C'est aujourd'hui le cas de la somme des masses des neutrinos. Le modèle est réfuté si deux choses arrivent ensemble. D'abord, la borne cosmologique descend sous $0{,}066\,\mathrm{eV}$ quel que soit le modèle cosmologique retenu. Ensuite, aucun mécanisme des niveaux suivants n'abaisse cette somme dans le sens annoncé. La même règle vaut pour toute autre grandeur qui sortirait de sa plage.

(e) *Un ordre inversé.* L'ordre normal des masses des neutrinos découle du niveau, sans règle ajoutée et pour toutes les lectures. Un ordre inversé établi par l'expérience réfuterait donc le modèle.

(f) *Des corrections de sens contraire.* Les interactions des niveaux suivants doivent raidir les hiérarchies de masse. Si, une fois construites, elles les aplatissaient, la lecture « structures et plages à ce niveau, valeurs fines au-dessus » échouerait sur sa propre condition.

16.2 Ce que réfuterait une prémisse qui cède

Les conditions qui suivent touchent des énoncés démontrés, ou dérivés sous condition, qui ne peuvent tomber que si une de leurs prémisses cède (un contre-exemple ferait tomber tout théorème, ce qui n'apprend rien). Elles nomment donc ce que le travail suppose.

(1) *Qu'un niveau puisse avoir deux actes.* Le travail ne pose pas l'unicité de l'acte comme un principe. C'est une régularité observée sur les cinq passages que le programme décrit, avec une raison algébrique pour les deux premiers seulement. Mais le verrou en dépend, de sorte qu'elle joue ici le rôle de la seule hypothèse d'architecture du travail. En effet, briser la conjugaison à ce niveau exigerait de choisir une racine de moins un, donc de rendre observables les générateurs anti-hermitiens. Cela reviendrait à accomplir ici l'acte du niveau suivant. Le gel, l'absence de dynamique et la dette tomberaient alors. La patte supplémentaire de la section 10 n'enfreint pas cette règle, car elle relève de l'acte du niveau de la matière. Cet acte n'est pas accompli ici (on pose seulement l'objet), et l'emprunt est déclaré.

(2) *Qu'un horizon compte autre chose que les bits des faces.* Le travail suppose que ce niveau fixe l'unité du comptage (deux états par perforation de spin $\frac{1}{2}$, $\ln 2$ par face), et que des spins plus grands ne peuvent venir sur un horizon que par regroupement de grains. Le test appartient au niveau suivant et au niveau de la matière, qui ont des horizons. Ou bien ils font apparaître sur un horizon des spins effectifs plus grands que $\frac{1}{2}$, et l'on retrouve $\gamma = 0{,}2375$ ou $0{,}274$ selon le mode de regroupement. Ou bien l'horizon reste fait de liens de spin $\frac{1}{2}$, et $\gamma \simeq 0{,}127$, avec un quantum d'aire

différent. Si un horizon demandait des perforations dont les états ne se ramènent pas aux bits des faces, l'unité du comptage tomberait. La réfutation serait théorique et non expérimentale, car ce paramètre n'a aujourd'hui aucun accès expérimental (on le fixe par l'entropie d'un trou noir, qui n'a jamais été mesurée).

16.3 Ce qui reste ouvert

Le mot « ouvert » recouvre deux choses. Il y a d'abord ce que ce niveau ne fait pas mais qu'un niveau supérieur fait (ce ne sont pas des manques du programme). Il y a ensuite ce qu'aucun niveau ne fait. La dynamique est de la première sorte (elle est démontrée absente ici, et le niveau suivant la fournit). La sélection des formes où se lisent les particules et les valeurs fines aussi, mais les niveaux suivants doivent encore le montrer. La valeur du paramètre d'Immirzi aussi, avec pour niveaux d'accueil le niveau suivant et celui de la matière (section 15.1). Les points qui suivent sont de la seconde sorte, ou bien ce sont des travaux encore dus.

L'axe d'ordre et l'accumulation (par exemple l'entropie d'une région, qui croît à mesure que les recollements s'ajoutent) ne sont pas indépendants. En effet, le sous-espace invariant est de dimension un, et tout paramètre d'accumulation est invariant. Mais une grandeur peut être fonction de l'autre sans varier dans le même sens. La monotonie de la fonction qui relie l'axe d'ordre et l'accumulation reste donc à établir. La limite continue n'est pas construite. La valeur du couplage n'est pas dérivée (seule sa zone est fixée, par le calcul de la durabilité). Le niveau suivant donne la forme de l'opérateur qui agit sur un nœud, mais pas ses coefficients. Le niveau suivant avait établi trois résultats sur le réseau diamant. Deux sont rétablis sur l'arène de disphénoïdes. Le vide reste transparent (une seule branche sans gap sur six), et la vitesse limite garde sa valeur, $c = \sqrt{2/3}\,\ell/\delta\tau$ (ℓ la distance entre grains voisins, $\delta\tau$ le pas de temps), pour la raison donnée en section 4. La violation de Lorentz est isotrope à l'ordre $(k\ell)^2$ (coefficient $\frac{1}{12}$), et l'anisotropie cubique n'apparaît qu'à l'ordre $(k\ell)^4$. Le lemme d'anticommutation tient sous une forme modifiée (section 4). Le troisième résultat, l'inventaire des sept lieux d'une perturbation, n'est pas rétabli. Son théorème supposait que S_4 agit au grain, et il est à refaire au niveau suivant. Le passage des cinq états à cinq modes fermioniques est posé. Le lien entre la connexion interne (qui agit sur ces modes) et la connexion géométrique des faces n'est pas établi. Sept règles de lecture ont été formulées en connaissant leur cible. Elles devront être dérivées ou remplacées. L'écart de $\sin 2\beta$ vient d'un $|V_{cb}|$ trop bas, et il reste la principale tension de la lecture globale. Enfin, la contextualité sur les assemblages n'est pas analysée.

La monotonie relève d'une démonstration (ou d'un contre-exemple). La limite continue est un problème ouvert de toute approche discrète, dont le coût est chiffré ici. Le critère du substrat (pas de grandeur sans fondement) interdit de traiter la valeur du couplage comme une constante à mesurer, de sorte qu'elle est une dette du programme envers lui-même. L'inventaire des lieux, les règles de lecture et la contextualité demandent un travail dont la méthode est connue.

17 Conclusion

D'où vient l'espace ? Sa dimension n'est ni postulée ni choisie. C'est le nombre de générateurs indépendants de l'algèbre des commutateurs d'opérations sur deux bits qui ne commutent pas (les seules primitives que fournit le substrat). La valence du grain découle du même raisonnement. L'arène, elle, est une prémisse, et sa platitude est démontrée. Les trois conditions que le volet précédent assignait à la transition sont remplies. Il y a un seuil critique (où le réseau s'ordonne), un attracteur (le vide, qui choisit l'une de deux organisations jumelles) et une métrique discrète (l'arène plate de tétraèdres identiques). Les deux premiers sont calculés, et la troisième repose sur l'arène retenue.

Dans la partie cinématique, le résultat le plus distinctif est peut-être la bipartition. Elle place chaque grain dans un sous-réseau qu'aucune observable de ce niveau ne peut lire (verrou achiral), et que le niveau de la matière, deux niveaux plus haut, lit comme l'espace interne du doublet électrofaible. Les deux théorèmes d'impossibilité bornent, par une démonstration, ce que ce cadre ne peut pas produire (la signature reste indéterminée entre trois options, et, sous les prémisses (P1) et (P2), la dynamique est absente).

Dans la partie numérique, le résultat principal est la séparation nette entre ce que le niveau fixe et ce qu'il laisse libre. Le niveau fixe des structures (trois familles, un triplet et un doublet protégés par la symétrie du point, les seize états d'une génération sous le postulat des modes, un générateur qui, identifié à $B-L$, rend compte du facteur trois entre quarks et leptons). Il fixe aussi des plages chiffrées, et les dix-huit grandeurs calculées y tombent toutes, à l'erreur de mesure près. Seule la somme des masses des neutrinos, calculée à part, est hors de sa plage. Il ne fixe pas les valeurs fines, qui se règlent par des interactions propres aux niveaux suivants, sur une assiette plate (dont le maximum plat de la durabilité est un premier signe).

Le statut de chaque énoncé montre ce qu'il expose à la réfutation. *Démontrés :* la factorisation binaire et la dimension trois, la borne sur le commutant, la structure de produit fibré du recollement, la platitude de l'arène et sa bipartition, les deux théorèmes d'impossibilité, la non-commutation de l'aire et du volume orienté, la non-factorisabilité d'une face partagée et la valeur de son entropie, l'unité du comptage d'un horizon (deux états par perforation de spin $\frac{1}{2}$), la monogamie comme propriété de la géométrie, le diagramme de poids des appariements, la décomposition des cinq états en $\mathbf{3}+\mathbf{2}$, le générateur des quatre anneaux, et la permanence de la connectivité. *Calculés sur de grands réseaux :* le seuil de l'ordre, la zone de durabilité (sous une règle dont les agrégats ont été choisis après coup), le mode propre de période quatre, la persistance de la symétrie du point dans le vide fluctuant, l'échelle des familles, et les plages. *Dérivés sous condition :* la valence du grain (sous le critère d'information), la dichotomie des statistiques (sous le foncteur, qui demande l'acte), la règle de Born (sous une hypothèse d'additivité importée), les seize états d'une génération avec leurs charges, et le centre $\mathbb{Z}_4$

(sous le postulat des modes). *De statut mixte :* le spectre de l'aire (dérivé dans sa forme, étalonné dans son échelle), et la décohérence (le mécanisme est dérivé, mais le sens de la mesure, qui demande un temps orienté, reste une dette). *Posés ou empruntés :* l'enveloppe linéaire, les deux théorèmes de mathématiques importés (Gel'fand–Naimark et Peter–Weyl), la patte supplémentaire, le postulat des modes, l'identification du générateur à $B - L$, l'équation de comptage des horizons et la répartition des spins sur un horizon, et les règles de lecture des valeurs. *Prémisses assumées :* le choix de l'arène réalisée, et la condition de bord à l'horizon, qui fonde le comptage au bord. *Lu, et non dérivé :* le schéma de comptage des horizons (le poids 2, lu sur le résidu $U(1)$ d'une face). *Renvoyé aux niveaux supérieurs :* la valeur du paramètre d'Immirzi (niveaux d'accueil N_1 et N_2). *Une hypothèse d'architecture :* l'unicité de l'acte par niveau (condition (1)). *Une conjecture, que le niveau suivant nomme ainsi :* que le choix de $\pm i$ soit le seul remède aux sept manques (il les lève avec des acquis du niveau, et aucun par lui seul ; section 15). *Accords, et non prédictions :* les rapports de masse et les angles de mélange. *Prédictions que l'expérience tranchera :* l'ordre normal des masses des neutrinos, la somme de ces masses (aujourd'hui en tension avec la borne cosmologique), et le signe de la violation de CP des leptons par rapport à celle des quarks. *Annoncé d'avance, et tranché par les niveaux suivants :* le sens des corrections qu'ils devront apporter.

Et encore une chose, qui dépasse cet article. Le programme suppose que, si le modèle est correct, les structures de ce niveau deviennent le support invisible du niveau suivant. Les familles de la matière et sa couleur seraient alors des propriétés d'un point du vide de l'espace, et non des données ajoutées à l'espace. Cette conclusion n'est pas établie, et les articles suivants devront la vérifier ou la corriger.

Disponibilité des données

Les codes de simulation, les données et les critères de décision écrits avant chaque calcul sont disponibles sur le site du programme [20]. On y trouve aussi la version longue de cet article, avec ses démonstrations et l'historique complet des épreuves.

Déclaration d'usage

L'IA Claude (Anthropic) a servi à écrire les codes de simulation et d'analyse, à la vérification formelle, à la relecture critique et à la traduction, car cet article a été rédigé en français. Le contenu scientifique, les thèses, les choix de recherche et les erreurs restent ceux de l'auteur.

Références

[1] Y. Kocher. Essay on a general theory of complexity: foundations of the microGlobal approach. *IPI Letters*, 4(2):O112–O166, 2026. https://doi.org/10.59973/ipil.362

[2] Y. Kocher. Sélection du groupe $\mathbb{Z}_4$ par le code de Gray et verrou achiral sur l'orientation d'une boucle logique. Un substrat pré-physique et sa transition vers l'information. *IPI Letters*, 4(4):1–18, 2026. https://doi.org/10.59973/ipil.440

[3] C. Rovelli et F. Vidotto. *Covariant Loop Quantum Gravity*. Cambridge University Press, Cambridge, 2014.

[4] L. Bombelli, J. Lee, D. Meyer et R. D. Sorkin. Space-time as a causal set. *Physical Review Letters*, 59:521–524, 1987.

[5] G. Altarelli et F. Feruglio. Discrete flavor symmetries and models of neutrino mixing. *Reviews of Modern Physics*, 82:2701–2729, 2010.

[6] S. F. King et C. Luhn. Neutrino mass and mixing with discrete symmetry. *Reports on Progress in Physics*, 76:056201, 2013.

[7] H. Fritzsch et P. Minkowski. Unified interactions of leptons and hadrons. *Annals of Physics*, 93:193–266, 1975.

[8] H. Georgi. The state of the art—gauge theories. *AIP Conference Proceedings*, 23:575–582, 1975.

[9] I. M. Gel'fand et M. A. Naimark. On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space. *Matematicheskii Sbornik*, 12(2):197–213, 1943.

[10] F. Peter et H. Weyl. Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe. *Mathematische Annalen*, 97:737–755, 1927.

[11] O. Delgado Friedrichs, M. O'Keeffe et O. M. Yaghi. Three-periodic nets and tilings: regular and quasiregular nets. *Acta Crystallographica A*, 59:22–27, 2003.

[12] T. Regge. General relativity without coordinates. *Il Nuovo Cimento*, 19:558–571, 1961.

[13] J. Ambjørn, A. Görlich, J. Jurkiewicz et R. Loll. Nonperturbative quantum gravity. *Physics Reports*, 519:127–210, 2012.

[14] B. S. DeWitt. Quantum theory of gravity. I. The canonical theory. *Physical Review*, 160(5):1113–1148, 1967.

[15] M. Domagała et J. Lewandowski. Black hole entropy from quantum geometry. *Classical and Quantum Gravity*, 21(22):5233–5243, 2004.

[16] K. A. Meissner. Black-hole entropy in loop quantum gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 21(22):5245–5251, 2004.

[17] A. Ashtekar, J. Baez, A. Corichi et K. Krasnov. Quantum geometry and black hole entropy. *Physical Review Letters*, 80:904–907, 1998.

[18] A. Ghosh et P. Mitra. An improved lower bound on black hole entropy in the quantum geometry approach. *Physics Letters B*, 616:114–117, 2005.

[19] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller et E. Teller. Equation of state calculations by fast computing machines. *Journal of Chemical Physics*, 21:1087–1092, 1953.

[20] Y. Kocher. Émergence de la structure de l'espace-temps à partir d'un substrat logique. Le niveau informationnel du programme microGlobal, version longue, octobre 2026, https://microglobal.ch.

[21] H. Georgi et C. Jarlskog. A new lepton–quark mass relation in a unified theory. *Physics Letters B*, 86:297–300, 1979.

[22] G.-y. Huang et S. Zhou. Precise values of running quark and lepton masses in the Standard Model. *Physical Review D*, 103:016010, 2021.

[23] Particle Data Group, S. Navas *et al.* Review of particle physics. *Physical Review D*, 110:030001, 2024.

[24] I. Esteban, M. C. Gonzalez-Garcia, M. Maltoni, I. Martinez-Soler, J. P. Pinheiro et T. Schwetz. NuFit-6.0: updated global analysis of three-flavor neutrino oscillations. *Journal of High Energy Physics*, 12:216, 2024.

[25] J. Charles *et al.* (CKMfitter). 2023 update of the extraction of the CKM matrix elements. arXiv:2405.08046, 2024.

[26] DESI Collaboration. Constraints on neutrino physics from DESI DR2 BAO and DR1 full shape. 2025.

[27] K. G. Wilson. Confinement of quarks. *Physical Review D*, 10:2445–2459, 1974.

[28] P. Busch. Quantum states and generalized observables: a simple proof of Gleason's theorem. *Physical Review Letters*, 91:120403, 2003.

[29] A. M. Gleason. Measures on the closed subspaces of a Hilbert space. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 6(6):885–893, 1957.

[30] B. S. Tsirelson. Quantum generalizations of Bell's inequality. *Letters in Mathematical Physics*, 4:93–100, 1980.

[31] S. Kochen et E. P. Specker. The problem of hidden variables in quantum mechanics. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 17(1):59–87, 1967.

[32] R. Landauer. Irreversibility and heat generation in the computing process. *IBM Journal of Research and Development*, 5(3):183–191, 1961.